INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIAS
CAMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS DE MATEMÁTICA

GABRIELA SILVA LEMES

A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO:

Um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov

JATAÍ
2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

[ ] Tese
[X] Dissertação
[ ] Monografia – Especialização
[ ] TCC - Graduação
[ ] Artigo Científico
[ ] Capítulo de Livro
[ ] Livro
[ ] Trabalho Apresentado em Evento
[ ] Produto Técnico e Educacional - Tipo:___________________________

Nome Completo do Autor: **Gabriela Silva Lemes**
Matrícula: **20182020280041**
Título do Trabalho: **A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV**

Autorização - Marque uma das opções

1. (**X**) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ( ) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ___/___/_____ (Embargo);
3. ( ) Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

( ) O documento está sujeito a registro de patente.
( ) O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
( ) Outra justificativa: ____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Jataí, 12 de Abril de 2021.

Gabriela Silva Lemes

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

GABRIELA SILVA LEMES

A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO:

Um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestra em Educação para Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Linha de pesquisa: Fundamentos, metodologias e recursos para a Educação para Ciências e Matemática.
Sublinha de pesquisa: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

JATAÍ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Lemes, Gabriela Silva.
A formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração: um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov [manuscrito] / Gabriela Silva Lemes. -- 2021.
310 f.; il.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.
Dissertação (Mestrado) – IFG – Campus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2021.
Bibliografia. Apêndices.

1. Teoria histórico-cultural. 2. Teoria do ensino desenvolvimental. 3. Adição de fração. 4. Experimento de ensino. 5. Ensino de Matemática. I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas. II. IFG, Campus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F049/2021/1.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ

GABRIELA SILVA LEMES

A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação para Ciências e Matemática, defendida e aprovada, em 19 de março de 2021, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz -** Presidente da banca / Orientador - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; **Profa. Dra. Arianny Grasielly Baião Malaquias -** Membro interno - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás e **Prof. Dr. Jamur André Venturin -** Membro externo - Universidade Federal do Tocantins. A sessão de defesa foi devidamente registrada em ata que depois de assinada foi arquivada no dossiê da aluna.

(assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

À Deus. Sem O Teu sopro de vida nada seria possível, nada existiria, nem mesmo estas simples palavras.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Senhor Jesus que a todo momento esteve ao meu lado me auxiliando e capacitando. A Ele toda a honra e a Glória, para sempre, amém.

À minha família amada, a minha mãe Luciana, ao meu pai Rober e aos meus irmãos Jalles e Bruno. Obrigada pelo amor, apoio e compreensão. Agradeço a Deus pela nossa união, aqui, na Terra, e oro para que permaneçamos unidos na eternidade com o nosso Papai do céu.

Aos meus padrinhos Laercio e Graziela pelo acolhimento em sua residência em Goiânia, quando não tinha condições de voltar para minha casa, em Bela Vista de Goiás, pelo fato de chegar tarde da noite devido as aulas do mestrado que assistia em Jataí. Obrigada pelo cantinho fornecido a mim com tanto amor e carinho para descansar e ter uma boa noite de sono para que, no dia seguinte, pudesse chegar em minha casa.

À dona Lúcia pelo incentivo, pelos livros que me foram dados, pelas longas e deliciosas conversas sobre educação. Com certeza a senhora é uma inspiração, um exemplo para mim.

Ao meu orientador Duelci Aparecido de Freitas Vaz, pela disposição em compartilhar os seus conhecimentos e experiências. O senhor teve um papel fundamental para o meu crescimento, tanto em relação a Teoria do Ensino Desenvolvimental quanto como educadora.

À minha amiga Ana Paula, pela carona rumo à Jataí todas as quintas-feiras para assistirmos as aulas do mestrado.

Ao meu amigo Sinomar e sua esposa Luzia pelo acolhimento em sua residência em Jataí, pelos almoços e jantares maravilhosos que nos aguardavam após as aulas do mestrado.

Ao meu amigo Ewerson, meu parceiro de escrita e submissão de trabalhos à congressos. Obrigada pelo incentivo e apoio.

À professora da turma de 6º ano, pela confiança, por novamente abrir um espaço para mim em sua sala de aula.

À Escola Estadual Murilo Braga pela abertura concedida para a realização desta pesquisa.

Ao coordenador do programa de pós-graduação em Educação para Ciência e Matemática, Paulo Henrique, pela disposição em sempre nos ajudar seja qualquer assunto.

Ao Instituto de Educação em Ciência e Tecnologia de Goiás pela bolsa de estudo concedida.

Por último, não menos importante, aos professores integrantes da banca examinadora pela leitura desta dissertação. Suas contribuições são de grande valia.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo identificar as contribuições de um experimento de ensino elaborado para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração. Para isso, foi planejado um experimento de ensino, de acordo com a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, que objetiva a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto. Esse método visa o cumprimento de cinco ações, por parte dos alunos, para a formação do pensamento teórico: (1) Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo; (2) Modelação da relação geral do objeto de estudo; (3) Transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo a fim de estudar as suas propriedades em forma pura; (4) Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral e (5) controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente. Em suma, os estudantes devem: identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, que é a equivalência de frações; a partir da história das frações estabelecer um modelo gráfico, literal, que expressa essa relação e, por fim, resolver situações particulares utilizando o procedimento geral estabelecido anteriormente. O experimento de ensino, como método de intervenção, foi desenvolvido em uma turma de 6 º ano do ensino fundamental de um Colégio Estadual da região central de Goiânia, onde visou responder a seguinte questão investigativa: Que contribuições um experimento de ensino sobre o conceito de adição de fração à luz da Teoria do Ensino Desenvolvimental pode trazer para a formação do pensamento teórico dos estudantes? Para responder a essa questão foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: um roteiro de observação, registrado em diário de campo; um questionário misto aplicado aos alunos e, por fim, as tarefas de aprendizagem que compõem o experimento de ensino. Como forma de organização dos dados foram elencadas as seguintes categorias: formação de conceitos (pensamento teórico/pensamento empírico), zona de desenvolvimento proximal, comunicação compartilhada/interação, mediação e atividade de estudo. A análise dos dados se deu de forma qualitativa, sendo analisados de acordo com as particularidades das categorias elencadas na perspectiva da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental.

Palavras-chave: Teoria Histórico-cultural. Teoria do Ensino Desenvolvimental. Adição de fração. Experimento de ensino. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This coursework aims to identify the contributions of a didactic formative experiment designed for the formation of the theoretical thought of the concept of fraction addition. For this, a formative didactic experiment was planned, according to Davydov's Theory of Developmental Teaching, which aims at the formation of theoretical thinking by the method of ascending from abstract to concrete. This method aims at the fulfillment of five actions, by the students, for the formation of theoretical thinking: (1) Transformation of the task data aiming to identify the general relationship of the object of study; (2) Modeling the general relationship of the object of study; (3) Transformation of the model of the general relation of the object of study in order to study its properties in pure form; (4) Construction of the system of particular tasks that can be solved by a general procedure and (5) Control or monitoring of the actions performed previously. In short, students must: identify the general relationship of the concept of adding fractions with different denominators, which is the equivalence of fractions; based on the history of fractions, establish a graphic, literal model that expresses this relationship and, finally, solve some particular situations using the general procedure previously established. The didactic training experiment, as an intervention method, was developed in a class of 6th grade of elementary school of a Public School in the central region of Goiânia, where it aimed to answer the following investigative question: What contributions did a didactic training experiment on the concept of addition of fraction in the light of the Developmental Teaching Theory can bring to the formation of students' theoretical thinking? To answer this question, the following data collection instruments were used: an observation script, recorded in a field diary; a mixed questionnaire applied to students and, finally, the learning tasks that make up the didactic training experiment. As a form of data organization, the following categories were listed: concept formation (theoretical thinking / empirical thinking), zone of proximal development, shared communication / interaction, mediation and study activity. The analysis of the data took place in a qualitative way, being analyzed according to the particularities of the categories listed in the perspective of the Historical-cultural Theory and the Theory of Developmental Teaching.

Keywords: Historical-cultural Theory. Theory of Developmental Education. Fraction addition. Formative didactic experiment. Mathematics teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O universo dos números racionais, desde o ensino médio até a graduação, sempre me intrigou, pois era uma de minhas grandes dificuldades de compreensão dentro da matemática. Lembro-me que em meu primeiro ano na faculdade, em 2014, ao resolver um problema na disciplina de geometria analítica, me deparei com uma situação em que era preciso realizar uma adição de fração, cujos denominadores não eram iguais. Dessa forma, ao visualizar a operação, não sabia como proceder com os cálculos, confirmando o que diz Rosa et al (2013, p. 230) "[...] que os estudantes apresentam grandes dificuldades quando se deparam com uma fração para operar, por mais simples que seja".

Diante da minha falta de saber, fiquei frustrada, pois para mim, não era concebível estar em um curso de Licenciatura em Matemática[1] e não conseguir realizar uma operação de adição de fração. Recordo-me que, neste momento, quis desistir do curso, isso porque me perguntava: "Se estou com dificuldade sobre um conceito básico de matemática, como me apropriarei de disciplinas tais como, geometria euclidiana, cálculo diferencial e integral, análise, dentre tantas outras que compõem a grande curricular do curso de Licenciatura em Matemática?". Além disso, também me questionava de quem era a culpa por não saber operar com as frações. Seria minha? Seria do professor do ensino fundamental ou médio? De quem é a culpa? Mas, ao invés de desistir ou simplesmente apontar os culpados, persisti, buscando superar a minha dificuldade.

Para realizar a operação de adição que havia no problema de geométrica analítica, recorri a um livro aleatório de matemática para o ensino fundamental. A explicação do livro é semelhante a que Aquino (2013, p. 28) traz:

> Primeiro calcula-se o mmc dos denominadores, em seguida efetua-se a divisão do MMC (Mínimo Múltiplo Comum) pelo primeiro denominador e o resultado multiplica-se pelo primeiro numerador, repete este processo para o segundo numerador e denominador, finalmente soma numerador com numerador e repete o denominador. De fato, temos: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.d}+\frac{c.b}{b.d}=\frac{a.d+c.b}{bd}$ AQUINO (2013, p. 28).

Me apropriei, ou melhor, "decorei" essa forma de se somar frações com denominadores diferentes, e a apliquei em diversas questões matemáticas durante toda a minha trajetória

---

1 Pontifícia Universidade Católica de Goiás, é a Instituição de Ensino a qual cursei Licenciatura em Matemática.

acadêmica. Nunca havia questionado o motivo pelo qual é preciso encontrar um denominador em comum entre as frações que se quer operar para, posteriormente, seguir com o processo mencionado por Aquino (2013). Apenas aplicava a regra e, para mim, bastava somente obter o resultado correto da questão que objetivava responder, confirmando o que diz Magina e Campos (2008, p. 26) que "[...] os alunos podem até apresentar algumas habilidades em manipular os números racionais, sem necessariamente ter uma compreensão clara do conceito".

Em 2017, último ano da graduação, a minha simples aceitação, acerca das "regras" matemáticas, estavam prestes a mudar. Nesse sentido, motivada pela minha dificuldade inicial em compreender as frações, desenvolvi um trabalho de monografia, cujo objeto de estudo se referia ao conceito de fração. A minha pesquisa, nesta época, foi desenvolvida em uma turma de 6º ano do ensino fundamental, de uma escola da rede pública de ensino em Goiânia, a qual intervia por meio do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência).

Dessa forma, quando estava em sala de aula desenvolvendo a proposta de minha pesquisa, uma pergunta surgiu por parte de um aluno que dizia, indignado, não perceber sentido na matemática, pois esta é cheia de regras para decorar. Assim, apontou-me para a questão e perguntou-me: "Professora, por que devemos encontrar o MMC, dividi-lo pelo denominador e o resultado multiplicar pelo numerador da fração?". "Por que", uma expressão tão simples, mas tão cheia de significados. Portanto, não soube responder, ao aluno, o porquê.

Tanto a mim quanto o sujeito da pesquisa, estávamos apenas reproduzindo regras. Não sabíamos o que estávamos executando, ou seja, não compreendíamos a essência do conceito. Isso pode indicar um tipo de organização de ensino que vem sendo transmitido tanto na Educação Básica quanto nas universidades.

> Podemos afirmar que, esse tipo de organização de ensino, praticamente obriga, a maioria dos alunos das escolas da Educação Básica e dos cursos de licenciatura de Matemática a ficar sentados e enfileirados, durante horas, primeiramente, copiando o que os professores expõem na lousa e, em seguida, treinando o que copiaram para serem avaliados. É um ciclo vicioso que tem frequentado as escolas e as universidades, há muito tempo (SOUSA, 2018, p. 41).

Em meio a essa situação, também escrevia o meu pré-projeto de pesquisa para submetê-lo a seleção do Programa de Pós-graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Goiás. Recordo-me que recorri ao professor Duelci, para examinar o pré-projeto, pois almejava tê-lo como orientador de mestrado. Dessa forma, com muita hospitalidade, propôs-me uma pesquisa acerca da Teoria do Ensino Desenvolvimental, pois é o seu objeto de estudo.

Inicialmente, me propus a pesquisar sobre o conceito de fração, geometria, juros simples, função e operações básicas, à luz da Teoria do Ensino Desenvolvimental, o que era bastante amplo segundo as professoras que avaliaram o pré-projeto no VII Seminário de Pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, ocorrido em março de 2019. Sem dúvidas, não conseguiria "abraçar o mundo com as mãos", tal como disse uma das avaliadoras.

Sendo assim, busquei na memória algum acontecimento em minha trajetória acadêmica para que pudesse pesquisar sobre algo que tivesse significado pessoal para mim. Assim, lembrei-me do ocorrido em 2014, na disciplina de geometria analítica, da minha dificuldade em operar com as frações, e do acontecimento em 2017 durante a aplicação da proposta do meu trabalho de monografia, onde não consegui responder ao aluno aquele "Por que". Portanto, diante dessa problemática, a escolha de pesquisar sobre a formação do conceito de adição de fração, na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, **justifica-se** devido a uma necessidade pessoal de superação em relação a dificuldade de compreensão e, consequentemente, de apropriação desse conceito, resultando apenas na formação do pensamento empírico.

Dessa forma, ao estudar a fundo sobre a Teoria do Ensino Desenvolvimental, compreendi que esta poderia ser promovida no ensino para responder o "Por que" do conceito de adição de fração. Isso se deve ao fato de que, a Teoria do Ensino Desenvolvimental possibilita ao aluno um papel ativo em busca do conhecimento, pois objetiva que este percorra o processo criativo que originou o conceito do objeto, de forma a recriá-lo (FREITAS; ROSA, 2015). Assim, defendemos a Teoria do Ensino Desenvolvimental no ensino, pois pode proporcionar aos alunos a apropriação da cultura historicamente produzida, dando-lhes a oportunidade para a formação do pensamento teórico, favorecendo o surgimento novas funções psicológicas superiores: a memória, atenção, consciência e a reflexão (FREITAS, 2016).

Especificamente, Davydov, ancorando-se na Teoria Histórico-cultural de Vygotsky e na Teoria da Atividade de Leontiev, defendia a formação do pensamento teórico por meio do método dialético, ou seja, pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto (DAVYDOV, 1988), que consiste em resgatar a essência do objeto de estudo, o seu aspecto nuclear, a sua relação geral, e aplicá-la em situações particulares (contextualizadas) (FREITAS, 2016). E, para isso, o aluno deve cumprir 5 (cinco) das 6 (seis) ações de aprendizagem que são descritas por Davydov (1988), sendo que a última é destinada ao professor:

1. Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo;
2. Modelação da relação geral do objeto de estudo;
3. Transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo a fim de estudar as suas propriedades em forma pura;
4. Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
5. Controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente;
6. Avaliação da aprendizagem.

As ações de aprendizagem elencadas por Davydov (1988) tem como propósito a formação do pensamento teórico acerca de um objeto culturalmente e historicamente desenvolvido. Dessa forma, para cada uma dessas ações, tarefas de aprendizagem devem ser planejadas pelo professor de forma que os alunos cumpram-nas, objetivando a formação do pensamento teórico do conteúdo que pretende-se ensinar. Assim, “ao mesmo tempo em que privilegia a atividade de aprendizagem do aluno, a organização do ensino por meio de tarefas valoriza enormemente a atividade do professor, exigindo dele criatividade na estruturação da atividade de ensino” (FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 81).

No caso do nosso objeto de estudo, que se refere ao conceito de adição de fração, foram elaboradas tarefas de aprendizagem de forma que os alunos cumpram as ações de aprendizagem descritas por Davydov (1988), que objetivam a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto. Em suma, de acordo com Davydov (1988), os estudantes devem: identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores diferentes; a partir da história das frações estabelecer um modelo gráfico, literal, que expressa essa relação e, por fim, resolver situações particulares utilizando o procedimento geral estabelecido anteriormente, o que, segundo Freitas e Limonta (2012), implica que o aluno está pensando teoricamente.

Tendo em vista a relação geral, os alunos devem identificá-la na primeira ação de aprendizagem. Neste caso, a relação geral que expressa o conceito de adição de fração com denominadores diferentes é a determinação de frações equivalentes para reduzir os denominadores de duas ou mais frações a uma mesma unidade. Assim, quanto ao conceito de fração equivalente, Vasconcelos (2015) menciona que são frações que expressam uma mesma quantidade.

Diante dessas especificações, utilizamos o experimento de ensino como método de intervenção que visa a organização do ensino para o desenvolvimento de ações mentais que, neste caso, se refere ao conceito de adição de fração. Assim, defendemos o experimento de ensino, pois "[...] tem como característica a intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda (DAVYDOV, 1988, p. 188), que é a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto.

Nesse sentido, este trabalho visa responder a seguinte **questão investigativa**: Que contribuições um experimento de ensino sobre o conceito de adição de fração à luz da Teoria do Ensino Desenvolvimental pode trazer para a formação do pensamento teórico dos estudantes? Para respondermos a essa pergunta, foi elaborado um experimento de ensino, na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental, e aplicado em uma turma de 6º ano do ensino fundamental de um Colégio Estadual[2] da região central de Goiânia, tendo como **objetivo** de pesquisa identificar as contribuições de um experimento de ensino elaborado para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração.

Em relação a revisão bibliográfica, para selecionar os trabalhos de interesse da pesquisa, recorri ao Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Nessa busca interessava-me reunir trabalhos sobre o ensino de frações na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental. Assim, **sem restrições de ano**, utilizei dois descritores: "Teoria do Ensino Desenvolvimental", onde foram encontrados 50 (cinquenta) trabalhos, e "Ensino Desenvolvimental", obtendo um total de 64 (sessenta e quatro) trabalhos entre dissertações e teses. Portanto, escolhi considerar o descritor "Ensino Desenvolvimental" pelo fato de haver uma quantidade maior de trabalhos.

Dante disso, em "refinar meus resultados" optei por duas áreas de conhecimento: "Educação" e "Ensino de Ciência e Matemática". Assim, os 64 (sessenta e quatro) trabalhos foram reduzidos para 43 (quarenta e três). Dessa forma, com o objetivo de reunir trabalhos sobre o ensino de frações na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental, elaborei uma ficha-catálogo em que foram identificados e organizados os seguintes dados: autorias, título, instituições, orientações, tipo de trabalho, sublinha de pesquisa, objeto de estudo, data de defesa e os resumos.

Nesse sentido, o refinamento dos 43 (quarenta e três) trabalhos se deu a partir da leitura dos resumos. Dos 43 (quarenta e três), fiz separação dos correspondentes ao ensino de matemática, sendo identificados 21 (vinte e um) trabalhos.

---

2 A escolha em realizar a pesquisa nesta escola se deve ao fato de, no PIBID, ter realizado trabalhos na área da educação matemática juntamente com a professora de matemática desta turma de 6º ano do ensino fundamental.

No quadro 1, visualiza-se o conjunto de dissertações e teses referidas ao ensino de matemática, organizadas por orientação, instituição[3], objeto de estudo, ano e tipo de trabalho (dissertação ou tese), com destaque para as produções sobre o conceito de fração em cor amarelo.

Quadro 1 – Distribuição de dissertações e teses por orientação, instituição, objeto e ano

Orientação	Instituição	Objeto de estudo	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz	IFG	Conceito de volume				D		
	IFG	Geometria euclidiana					D	
	IFG	Área e perímetro de figuras planas			D			
	IFG	Conceito de juros					D	
	IFG	Trigonometria no triângulo retângulo						D
	IFG	Números complexos				D		
	IFG	Conceito de polígonos semelhantes		D				
	PUC-Goiás	Teorema de Tales				D		
	PUC-Goiás	Conceito de transformação linear						T
Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas	PUC-Goiás	Conceito de quantidade	T					
	PUC-Goiás	Conceito de função			T			
	PUC-Goiás	Ensino de estatística		D				
Dr. Wellington Lima Cedro	UFG	Estágio supervisionado		D				
	UFG	Números decimais					D	
Dra. Beatriz	PUC-Goiás	Conceito de fração						D

3 As instituições de origem dos trabalhos são: IFG – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; PUC-Goiás – Pontifícia Universidade Católica de Goiás; UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul; UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense; UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina; UNIUBE – Universidade de Uberaba; USP – Universidade de São Paulo.

Aparecida Zanatta	PUC-Goiás	Conceito de perímetro e área			**T**			
Dr. Cátia Maria Nehring	UNIJUÍ	Conceito de função					**T**	
Dr. Ademir Damazio	UNESC	Conceito de adição e subtração					**D**	
Dra. Josélia Euzébio da Rosa	UNISUL	Conceito de divisão				**D**		
Dra. Marilene Ribeiro Resende	UNIUBE	Conceito de função			**D**			
Dra. Vanessa Dias Morett	USP	Conceito de fração					**D**	

Fonte: elaborado pela autora.

Legenda: **D** (Dissertação)
T (Tese)

De acordo com as informações contidas no quadro 1, dos 21 (vinte e um) trabalhos que selecionei, 16 (dezesseis) são dissertações e 5 (cinco) são teses que foram defendidas no ano de 2013 a 2018. É importante frisar que não utilizei filtro temporal, pois havia poucos trabalhos disponíveis no banco de dados relacionados a Teoria do Ensino Desenvolvimental, sendo possível realizar a ficha-catálogo de todos os 43 (quarenta e três) trabalhos, identificando os 21 (vinte e um) trabalhos referentes ao ensino de matemática.

Dos 21 (vinte e um) trabalhos 9 (nove) são de orientação do professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz, 3 (três) da professora Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas, 2 (dois) do professor Dr. Wellington Lima Cedro, 2 (dois) da professora Dra. Beatriz Aparecida Zanatta e, por fim, 1 (um) trabalho na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental orientado pelo professor Dr. Ademir Damazio e pelas professoras: Dr. Cátia Maria Nehring; Dra. Josélia Euzébio da Rosa; Dra. Marilene Ribeiro Resende e Dra. Vanessa Dias Morett. Esses dados nos mostram, segundo o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, os principais pesquisadores/orientadores, no Brasil, da Teoria do Ensino Desenvolvimental no ensino de matemática.

Em relação a instituição que mais desenvolve pesquisas na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental, temos o IFG (Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Goiás) e a PUC-Goiás (Pontifícia Universidade Católica de Goiás), em seguida destaca-se a UFG (Universidade Federal de Goiás). Dos objetos de estudo evidencia-se o conceito de função, sendo 1 (uma) dissertação e 2 (duas) teses. Em seguida, temos o conceito de fração, com 2 (duas) dissertações (em amarelo), as quais selecionei para analisar dentre os 21 (vinte e um) trabalhos.

Elegi como *corpus* de pesquisa a dissertação[4] cuja orientação teve a professora Dra. Beatriz Aparecida Zanatta e a dissertação[5] orientada pela professora Dra. Vanessa Dias Morett. Assim, busquei identificar os seguintes aspectos: problema, objetivo geral, objetivos específicos, método, tipo e instrumentos de pesquisa, referencial teórico, abordagem do conceito de adição de fração na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental.

Dessa forma, constatou-se que o objeto de estudo de ambas as dissertações se trata da formação do pensamento teórico do conceito de fração na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental e, além disso, as pesquisas estão voltadas para a formação de professores.

Portanto, podemos considerar que não há, neste repositório, até o momento da revisão[6], dissertações ou teses que abordam o conceito de adição de fração, como objeto de estudo, na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental. Isso pode apontar a falta de pesquisas sobre a temática em questão, tendo como viés a teoria de Davydov, o que implica na relevância acadêmica deste trabalho.

A seguir, descrevo os capítulos que compõem esta dissertação.

O capítulo 2, destinei à descrição da Teoria Histórico-cultural de Vygotsky e da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov.

O capítulo 3, se refere aos procedimentos metodológicos adotados, a descrição do experimento de ensino elaborado e a apresentação da escola campo (local da pesquisa). Assim, quanto aos procedimentos metodológicos, utilizei o experimento de ensino como método de intervenção. Como instrumentos de coleta de dados, utilizei: um roteiro de observação (Apêndice D), registrado em diário de campo; um questionário misto aplicado aos alunos (Apêndice C) e, por fim, as tarefas de aprendizagem que compõem o experimento de ensino (Apêndice A). Como forma de organização dos dados foram elencadas as seguintes categorias: formação de conceitos (pensamento teórico/pensamento empírico), zona de desenvolvimento proximal, comunicação compartilhada/interação, mediação e atividade de estudo. A análise dos

---

4 SILVA, A. J. O. **Aprendizagem do Conceito Fração:** um Experimento de Ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2018.

5 ROMEIRO, I. O. **O movimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração e o sentido atribuído aos materiais didáticos na atividade de ensino**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

6 A Revisão bibliográfica foi realizada no mês de agosto do ano de 2019.

dados se deu de forma qualitativa, sendo analisados de acordo com as particularidades das categorias elencadas na perspectiva da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental.

Por fim, o capítulo 4, dediquei a descrição da aplicação do experimento de ensino, bem como a sua análise, objetivando responder a nossa questão de investigação.

2 A FORMAÇÃO DE CONCEITOS CIENTIFICOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar os pressupostos teóricos da Teoria Histórico-cultural, de Vygotsky, e da Teoria do Ensino Desenvolvimento de Davydov, na formação de conceitos

2.1 A Teoria Histórico-cultural de Vygotsky

Lev Semenovich Vygotsky foi um teórico russo nascido em 17 de novembro de 1896 na cidade de Orsha, e teve o seu falecimento em 1934, aos 37 anos de idade, devido a uma tuberculose. Apesar dos poucos anos vividos, não foram poucas as suas contribuições para a psicologia e consequentemente para a educação. Dessa forma, mesmo à uma distância de tempo, os seus estudos ainda são referências no âmbito educacional.

Um “[...] crescente interesse em compreender o desenvolvimento psicológico do ser humano, e, particularmente, as anormalidades físicas e mentais [...]” (REGO, 1995, p.22), levou Vygotsky, aos 17 anos de idade, após terminar o ginásio, a prestar exames para a Faculdade de Medicina, onde foi admitido como estudante da Universidade Imperial de Moscou, iniciando o curso em setembro de 1913. Após o seu ingresso na Universidade, se transferiu para a Faculdade de Direito e também se matriculou no curso de História e Filosofia da Universidade Popular de Chaniavski, em 1914 (PRESTES; TUNES; NASCIMENTO, 2013).

Durante os seus estudos universitários, adquiriu formação no domínio das ciências humanas. Estudou linguística, estética e literatura, filosofia e também estudou história. Além disso, aos 20 anos de idade, Vygotsky escreveu a sua monografia sobre a tragédia de *Hamlet*, o que não indica mais uma obra sobre o trabalho de Shakespeare, mas sim o nascimento de um pensador original realizando uma análise psicológica da obra de arte (PRESTES; TUNES; NASCIMENTO, 2013).

Após a Universidade, em 1917, Vygotsky retornou à cidade de Gomel, local onde havia concluído o ginásio. Ali “[...] assumiu diferentes postos de trabalho, lecionando Literatura Russa em escolas, Psicologia Geral, Infantil e Pedagógica nos cursos técnicos de pedagogia e também se dedicando a atividades culturais (PRESTES; TUNES; NASCIMENTO, 2013, p. 54). Vygotsky também se dedicou a Pedologia, que é uma ciência que integra os aspectos biológicos, psicológicos e antropológicos da criança. “Ele considerava essa disciplina como sendo a ciência básica do desenvolvimento humano, uma síntese das diferentes disciplinas que estudam a criança” (OLIVEIRA, 1997, p. 20).

Além disso, Vygotsky dava palestras em congressos nacionais e, devido a um desses congressos, recebeu uma proposta para integrar um grupo de pesquisadores na Universidade de Psicologia, em Moscou. Esse congresso, realizado no começo de 1924, chamado de *II Congresso de Psiconeurologia*, foi onde Vygotsky realizou uma comunicação intitulada *Consciência como um Objeto da Psicologia do Comportamento*. Nessa comunicação, Vygotsky defendeu que "[...] a consciência era um conceito que deveria permanecer no campo da psicologia, argumentando que ela deveria ser estudada por meios objetivos" (LURIA, 2010, p. 22) e deixou claro que "[...] nenhuma das escolas de psicologia existentes fornecia as bases firmes necessárias para o estabelecimento de uma teoria unificada dos processos psicológicos humanos" (COLE; SCRIBNER, 1991, p. 9).

O motivo para tal afirmação se deve a situação da psicologia pós-revolucionária no começo do século XX que era extremamente paradoxal. A psicologia na Rússia e em demais localidades da Europa "[...] movia-se entre escolas antagônicas, cada uma procurando oferecer explicações parciais para alguns fenômenos" (COLE; SCRIBNER, 1991, p. 9). Desse modo, a psicologia estava dividida em dois grupos para explicar a consciência humana. De um lado um grupo se baseava no reducionismo behaviorista, por outro, no idealismo:

> "[...] o reducionismo behaviorista se recusava a reconhecer a consciência como pertencente ao campo da investigação psicológica, enquanto as abordagens idealistas, subjetivistas acreditavam que a consciência só podia ser estudada por meio de métodos não objetivos como a introspecção" (HOLZMAN, 2013, p. 85).

Os psicólogos behavioristas (objetivistas), grupo representado por Pavlov, Kornilov, Bekhterev e os reflexologistas, defendem que "[...] a consciência é redutível a um conjunto de acontecimentos físicos objetivamente observáveis, governados por um conjunto especificável de leis físicas" (BAKHURST, 2013, p. 233). Os psicólogos idealistas (subjetivistas) grupo representado por Chelpanov, aborda a consciência como um fenômeno "[...] não físico, que ocorre num mundo de pensamento contido em si mesmo, 'interior', e acessível ao investigador somente através de modos 'não científicos' de pesquisa" (BAKHURST, 2013, p. 233).

Especificamente, os behavioristas estudavam o comportamento humano atentando-se à quantificação dos fenômenos observáveis utilizando-se de métodos experimentais. Eles se preocupavam com o comportamento exterior o que Rego (1995, p. 28) diz ser "[...] habilidades mecanicamente construídas". Dessa forma, esse grupo se limitava a análise dos processos elementares ou também chamados de "[...] funções mentais 'inferiores', naturais [...]" (KOZULIN, 2013, p. 117), que incluem: "[...] o pensamento não verbal (atividades simples de resolução de problema), a memória involuntária, e as formas primitivas de atenção, percepção e desejo" (BAKHURST, 2013, p. 234).

Já o grupo idealista não ignorava o estudo da consciência, mas "entendia a psicologia como ciência mental" (REGO, 1995, p. 28). Apesar de não descartar os estudos da consciência humana estes se confinavam num "[...] círculo vicioso de teorização no qual os estados de consciência são explicados por meio do conceito de consciência" (KOZULIN, 2013, p. 112). Dessa forma, os processos psicológicos humanos superiores, tais como o "[...] pensamento verbal, discurso intelectual, memórias e atenção voluntárias ou 'lógicas', e volição racional" (BAKHURST, 2013, p. 234), eram abordados de forma "[...] descritiva, subjetiva e dirigida a fenômenos globais [...]" (OLIVEIRA, 1997, p. 23). Portanto, o que se pode considerar é que a psicologia mentalista, idealista, "[...] não chegava a produzir descrições desses processos complexos em termos aceitáveis para a ciência" (OLIVEIRA, 1997, p. 23).

Como visto, de um lado, um grupo estudava o comportamento e ignorava a mente humana e, por outro lado, um grupo estudava a mente de forma que, para Vygotsky, não era de forma satisfatória. Isso demonstrava o fracasso das escolas em explicar satisfatoriamente a consciência que é um fenômeno considerado por Vygotsky como "[...] o objeto principal da investigação psicológica" (BAKHURST, 2013, p. 233). Diferentemente dos psicólogos das duas tendências, Vygotsky insistia que a "[...] consciência e comportamento são ambos objetos apropriados da investigação psicológica" (MINICK, 2013, p. 34). Isso quer dizer que, "[...] se os soviéticos quisessem estabelecer uma psicologia cientifica, sua tarefa era rasgar uma trilha entre o subjetivismo e o objetivismo" (BAKHURST, 2013, p. 234).

Diante disso, Vygotsky compreendia que tanto os behavioristas quanto os idealistas, "[...] além de não possibilitarem a fundamentação necessária para a construção de uma teoria consistente sobre os processos psicológicos tipicamente humanos, acabaram promovendo uma séria crise na psicologia" (REGO, 1995, p. 28). Buscando superar a crise na psicologia, Vygotsky e seus colaboradores, como Luria e Leontiev, buscaram estabelecer uma nova psicologia, "[...] uma abordagem alternativa, que possibilitasse uma síntese entre as duas abordagens predominantes naquele momento (OLIVEIRA, 1997, p. 23).

"O que Vygotsky procurou foi uma abordagem abrangente que possibilitasse a descrição e a explicação das funções psicológicas superiores, em termos aceitáveis para as ciências naturais" (COLE; SCRIBNER, 1991, p. 9-10). Segundo Oliveira (1997), Vygotsky procurou não simplesmente a soma das concepções behavioristas e idealistas, mas o surgimento de novos fenômenos partindo dessas duas tendências. Para isso Vygotsky procurou fundamentar os seus estudos na psicologia marxista. Ele "[...] viu, nos métodos e princípios do materialismo dialético, a solução dos paradoxos científicos com que se defrontavam seus contemporâneos e, como conseqüência, a possibilidade de superação do estado de crise da Psicologia" (REGO, 1995, p. 99).

Fazendo uso "[...] dos pressupostos construídos por Marx e Engels, Vygotsky e seus colaboradores objetivaram elaborar uma psicologia histórico-cultural, ampliando, assim, os horizontes da ciência psicológica" (REGO, 1995, p. 99), diferentemente da psicologia soviética que "[...] parecia ser quase totalmente reflexológica e permeada de citações aleatórias, e muitas vezes um tanto irrelevantes, de Marx, Engels e Lenin" (KOZULIN, 2013, p. 114). Assim, influenciado por Marx, Vygotsky desenvolveu a Teoria Histórico-cultural buscando explicar a consciência humana tendo em vista duas convicções: "[...] a de que os eventos psicológicos devem ser estudados na história e a de que a sociedade externa é o ponto de partida da consciência" (EMERSON, 2013, p.150).

A ideia é que Vygotsky compreendia o homem tanto em seu aspecto filogenético, sociogenético e ontogenético[7], ou seja, seu aspecto biológico, cultural e social. Isso quer dizer que o homem não é apenas o que ele é mas, sim um entrelaçamento entre o seu eu e valores culturais construídos ao logo do tempo pela humanidade. Dessa forma, "Vygotsky entendia que a compreensão do ser humano dependia do estudo do processo de internalização das formas culturalmente dadas de funcionamento psicológico" (REGO, 1995, p.100).

Para responder como se dá esse processo de internalização e assim compreender a consciência humana, Vygotsky e seus colaboradores precisariam descobrir o meio pelo qual os processos elementares se entrelaçam aos processos culturalmente dados para produzir as funções psicológicas superiores (LURIA, 2010). Essa ideia teve como base o materialismo dialético, onde assumiram o paradigma histórico-cultural de que "[...] toda a natureza e todos os seres vivos estão em constante movimento, mudança, e estão, portanto, em constante transformação" (ELHAMMOUMI, 2016, p. 26).

Vygotsky, então, direcionou esse pensamento de Marx à consciência humana objetivando explicar como os processos elementares se transformam em funções psicológicas superiores. Isso seria "[...] reconstruir a origem e o curso do desenvolvimento do comportamento e da consciência" (COLE; SCRIBNER, 1991, p. 10) e com isso transpor "o abismo existente entre as explicações científicas e naturais dos processos elementares e as descrições mentalistas dos processos complexos [...]" (LURIA, 2010, p. 25).

---

7 Vygotsky também compreendia o homem em seu aspecto microgenético que se caracteriza "pela emergência do psiquismo individual no cruzamento dos fatores biológicos, histórico e cultural, analisada na perspectiva das questões da afetividade e da personalidade" (BRAGA; DIAS, 2019, p. 176).

Vygotsky afirmava que “[...] as funções psicológicas superiores são de origem sócio-cultural e emergem de processos psicológicos elementares, de origem biológica (estruturas orgânicas)” (REGO, 1995, p.26), assim se abstraiu das concepções de Engels, e também de Marx, sobre o trabalho humano e o uso de instrumentos, sendo por meio destes que o homem transforma a natureza e consequentemente é transformado, para explicar o processo de transformação dos processos elementares para os superiores. Assim, Vygotsky considerou que “[...] os processos psicológicos humanos se desenvolvem como um resultado do modo de produção, relações sociais, ferramentas, signos e assim por diante, de uma sociedade” (ELHAMMOUMI, 2016, p. 27).

Portanto, em resumo, Vygotsky e seus colaboradores buscaram desenvolver uma nova psicologia tendo como base a teoria marxista. O fato desencadeador se deve a situação da psicologia pós-revolucionária no início do século XX. De um lado um grupo objetivista e, de outro, um grupo subjetivista, tentavam estabelecer as suas ideias dentro da psicologia, segundo Vygotsky, causando uma crise. Vygotsky, então, afirmou que nenhuma das duas tendências antagônicas presentes na psicologia conseguiam explicar de forma satisfatória a consciência já que um grupo focava no comportamento humano, evidenciando os processos elementares, e outro grupo estudava a mente humana, entretanto, de forma rasa.

Dessa forma, Vygotsky sintetizou as ideias das duas tendências psicológicas de comportamento e mente, objetivando desenvolver uma nova psicologia (Teoria Histórico-cultural) partindo principalmente dos princípios de Marx e Engels. Assim, tendo em vista o materialismo dialético, Vygotsky buscou responder como os processos elementares (processos que os objetivistas se limitavam) se transformam em processos superiores. Além disso, Vygotsky se baseando nos estudos de Engels, e também nos estudos de Marx, sobre trabalho humano e o uso de instrumentos, respondeu que os processos elementares se transformam em processos superiores (processos que os subjetivista explicavam superficialmente) através da cultura e das relações sociais bem como os seus resultantes: ferramentas e signos desenvolvidos em uma sociedade, ou seja, por meio da mediação simbólica.

2.1.1 Mediação simbólica: instrumentos e signos

O ser humano é capaz de pensar em objetos ausentes, imaginar eventos nunca vividos, planejar ações, dentre outros. Esse tipo de atividade psicológica é considerada “superior” conforme se diferencia dos processos elementares tais como: ações reflexas, onde um exemplo é a sucção do leite materno pelo bebê; ações automatizadas, como o ato de movimentar alguma parte do corpo devido a um som forte repentino e, além disso, existem os processos de associação simples como, por exemplo, o fato de evitar colocar o dedo na chama da vela devido a uma associação de dor em um evento ocorrido anteriormente (OLIVEIRA, 1997). Vygotsky, portanto, buscou estudar como os processos elementares se transformam em funções psicológicas superiores. Para isso ele buscou "compreender a questão da mediação que caracteriza a relação do homem com o mundo e com os outros [...]" (REGO, 1995, p. 50).

A noção de mediação de Vygotsky surgiu primeiramente como uma resposta à teoria do "estímulo-resposta", onde "[...] a conexão linear estímulo resposta é substituída por uma inter-relação triangular entre estímulo, resposta e instrumentos de mediação" (BAKHURST, 2013, p. 235). Assim, para uma ilustração dessa relação, tomemos o exemplo dado por Oliveira (1997) que aborda o processo de associação simples entre eventos, ou seja, o fato de evitar colocar o dedo na chama da vela devido a uma associação de dor em um evento ocorrido anteriormente.

Esse exemplo, para explicar o processo estímulo, resposta e instrumentos de mediação, é explicado por Oliveira (1997), que menciona que o sujeito estabelece uma relação direta ao aproximar a sua mão da chama de uma vela e a retira rapidamente ao sentir dor. Aqui temos a relação direta *calor da chama-retirada da mão* (estímulo-resposta). Em outro caso, ao aproximar a mão da chama da vela o sujeito, pelo fato de sentir o calor, este se lembrará do evento anterior de dor. Aqui temos uma relação indireta *calor da chama-lembrança da dor-retirada da mão* (estímulo-instrumento mediador- resposta). Oliveira (1997) prossegue dizendo que, nesse caso, o instrumento mediador é a lembrança da dor ocorrida em um evento anterior e, nesse mesmo exemplo, um outro instrumento mediador pode ser o fato de alguém dizer que pode se queimar ao aproximar a mão da chama da vela. O instrumento mediador, nesse último exemplo, é a experiência vivenciada por outra pessoa (OLIVEIRA, 1997).

Dessa forma, Vygotsky estabelece a ideia do homem relacionar-se com o mundo de forma mediada e não de forma direta, ou seja, a "mediação, em termos genéricos é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação: a relação deixa, então se ser direta e passa a ser mediada por esse elemento" (OLIVEIRA, 1997, p. 26). Isso implica que conhecer o processo de mediação "[...] é de fundamental importância justamente porque através deste processo que as funções psicológicas superiores, especificamente humanas, se desenvolvem" (REGO, 1995, p. 50) e, conhecer esse processo, requer o estudo dos elementos mediadores que estão entre o homem e o mundo sendo estes os instrumentos e os signos (OLIVEIRA, 1997).

Os instrumentos, ou também chamados de ferramentas materiais, "[...] servem como condutores das influências humanas sobre os objetos e que são, portanto, ferramentas externamente orientadas [...]" (KOZULIN, 2013, p. 116). Segundo Rego (1995), a concepção de Vygotsky sobre esse exemplo de mediador teve início com a concepção de Marx sobre o trabalho. É na atividade humana no meio externo que os instrumentos surgem pois "[...] para realizar sua atividade, o homem se relaciona com seus semelhantes e fabrica os meios, os instrumentos [...]" (REGO, 1995, p. 51). Portanto, as ferramentas humanas, ou também como visto, os instrumentos, surgem a partir da atividade humana no meio social.

O instrumento é criado para uma finalidade humana. Ele é interposto entre o trabalhador e o seu objeto de trabalho a fim de transformar a natureza. Um exemplo de instrumento é o machado que é preferível porque pode cortar mais do que a mão humana. Outro exemplo é o fato de armazenar água em um recipiente, sendo este o instrumento. Isso quer dizer que o instrumento carrega consigo o objetivo pelo qual foi desenvolvido durante a história do trabalho coletivo do homem e, portanto, caracteriza-se como um objeto social e mediador da relação sujeito e mundo (OLIVEIRA, 1997).

Já os signos, também chamados de ferramentas psicológicas, são "[...] elementos de cultura desenvolvidos pelos seres humanos para o controle dos processos mentais do próprio indivíduo" (HOLZMAN, 2013, p. 101). Especificamente, Minick (2013) diz que a função primária dos signos é a comunicação e que eles são usados como ferramentas ou também como instrumentos objetivando controlar o comportamento humano. Dessa forma, os signos podem ser comparados com os instrumentos discutidos anteriormente, entretanto, "[...] enquanto as ferramentas materiais visam o controle dos processos da natureza, as ferramentas psicológicas controlam os processos naturais comportamentais e cognitivos do indivíduo (KOZULIN, 2013, p. 116).

Para termos uma ideia, os signos são vistos como uma forma de ampliar a capacidade de atenção e memória do ser humano, por exemplo, ao amarrar um barbante no dedo para se lembrar de um compromisso, escrever um diário para não se esquecer de momentos vividos e utilizar um mapa para encontrar determinado local (REGO, 1995). Dessa forma, para compreender o papel dos signos na atividade psicológica do sujeito, Vygotsky e seus colaboradores desenvolveram vários experimentos sendo que um deles "[...] tinha como objetivo verificar a relação entre a percepção e a ação motora em crianças de quatro e cinco anos, com e sem a intervenção de signos mediares" (OLIVEIRA, 1997, p. 31).

Utilizando-se do modelo *estímulo-instrumentos de mediação-resposta*, Vygotsky e seus colaboradores desenvolveram, em duas fases, um experimento com crianças envolvendo figuras. Segundo Oliveira (1997), na primeira fase do experimento, era mostrado para a criança uma figura que deveria ser relacionada a uma tecla de um teclado que correspondia a figura, o que causou dificuldade a criança em decidir rapidamente qual tecla apertar. Na segunda fase do experimento os pesquisadores colocaram marcas nas teclas para auxiliar a criança na correspondência das figuras (por exemplo, a figura de um trenó para a criança recordar de um cavalo, a figura de uma faca para lembrar um pão) (OLIVEIRA, 1997). Dessa forma, a colocação das marcas nas teclas modificou o desempenho das crianças. Sendo assim, as crianças conseguiram associar as figuras às teclas do teclado, só que, agora, de forma mediada por meio do signo que representava cada figura e não de forma direta como na primeira fase (OLIVEIRA, 1997).

"Confrontado com esses relatos, Vygotsky assumiu a crença de que o signo não podia ser representado simplesmente como um elo extra, artificial, numa cadeia causal" (BAKHURST, 2013, p. 239). Isso se deve ao fato de que, a medida em que Vygotsky estudava o papel dos signos, este se deparou com uma gama de significados, resultando na mudança de sua explicação sobre a mediação. "Enquanto anteriormente ele retratara o signo como uma classe de estímulos artificiais especiais, operando em conjunto com outros 'estímulos' naturais, agora estava se concentrando em nossa capacidade de criar elaborados sistemas simbólicos, como a língua natural" [...] (BAKHURST, 2013, p. 236).

Vygotsky considerava a linguagem como um dos mais importantes sistemas de signos (MINICK, 2013) e "[...] é perigoso estudá-la em ambientes isolados ou em experimentos controlados tradicionais" (EMERSON, 2013, p. 149). É perigoso por que, segundo Emerson (2013), a linguagem é uma ferramenta, ou seja, é um meio de comunicação, de interação com o mundo. Dessa forma, estudar a linguagem em ambientes experimentais, estudá-la como um estimulo, resultaria em respostas simples comparadas ao universo que é a linguagem, portanto: "[...] conceitualizar a linguagem desta maneira teria resultado no tipo de noções simplistas [...]" (MINICK, 2013, p. 40).

Para Vygotsky aplicar o seu conhecimento sobre a linguagem à análise do desenvolvimento dos processos superiores, era necessário "[...] abandonar o conceito de que a linguagem funciona como um simples estímulo no comportamento humano" (MINICK, 2013, p.40). Isso implica que, para desenvolver os seus estudos sobre a linguagem como um sistema de signos e assim explicar o desenvolvimento dos processos superiores, Vygotsky deveria rejeitar a unidade estímulo-resposta como a base do comportamento (MINICK, 2013).

Dessa forma, ele insistia que a psicologia se tornasse sócio histórica e que os signos e os instrumentos, que formam a base do funcionamento mental humano são, segundo Vygotsky, criações culturais ou também chamadas de "práticas interpretativas" da comunidade (BAKHURST, 2013). Isso quer dizer que tanto os instrumentos quanto os signos, que são elementos mediadores na relação do homem com o mundo, são carregados de significado cultural que foram desenvolvidos pelas relações entre os homens (OLIVEIRA, 1997). Portanto, o desenvolvimento dos processos superiores do sujeito tem de ser visto como a consequência da apropriação ou "internalização" das práticas interpretativas, em particular a língua (BAKHURST, 2013), pois, especificamente a linguagem, "[...] exerce um papel fundamental na comunicação entre os indivíduos e no estabelecimento de significados compartilhados que permitem interpretações dos objetos, eventos e situações do mundo real" (OLIVEIRA, 1997, p. 40).

Em resumo, tendo em vista o exposto, Vygotsky percebeu nos sistemas simbólicos uma maneira de explicar os processos psíquicos superiores do ser humano. Esses sistemas simbólicos são compostos por instrumentos e signos que são desenvolvidos culturalmente. Em específico, os instrumentos surgem na atividade humana e são ferramentas destinadas para um fim específico como, por exemplo, o desenvolvimento de um machado para cortar uma árvore e a criação de utensílios para reservar alimentos. Os signos, por sua vez, são ferramentas psicológicas que tem como objetivo a comunicação e o controle do comportamento humano como, por exemplo, as placas sinalizadoras de trânsito são dotadas de signos que ao vê-las agem internamente no sujeito levando-o a uma determinada ação. Dessa forma, tanto o instrumento quanto o signo são elementos de cultura desenvolvidos pelos seres humanos. Enquanto o instrumento age de forma mediada entre o sujeito e o mundo, o signo age para o controle dos processos mentais do próprio indivíduo.

Vygotsky, buscando estudar o papel dos signos no desenvolvimento do comportamento humano, utilizou-se de uma ampliação da teoria "estímulo-resposta" para estímulo-instrumentos de mediação-resposta. Assim, desenvolveu sua pesquisa utilizando-se de signos (forma mediada) e sem utilização de signos (forma direta). O que Vygotsky percebeu foi que os signos não podem ser estudados como um estímulo ou um reflexo condicionado. Isso se deve ao fato de que ele considerava a linguagem como um importante sistema de signo e que não cabe estudá-la partindo dos princípios da teoria "estímulo-resposta". Isso reforçou ainda mais a ideia de Vygotsky de que a psicologia precisa ser estudada em sua forma sócio histórica e que os instrumentos e os signos, em especial a linguagem, são dotados de características históricas, culturais e sociais. Portanto, Vygotsky abandonou a unidade "estímulo-resposta" como a base para explicar o comportamento humano e voltou-se sua pesquisa para o que ele chamava de sistemas simbólicos ou sistemas psicológicos, tendo como objeto de estudo a linguagem e sua relação com o pensamento.

2.1.2 Pensamento e linguagem

Vygotsky deu ênfase a linguagem, que é um dos instrumentos básicos inventados pela humanidade, devido ao seu papel fundamental “[...] na organização e desenvolvimento dos processos de pensamento” (LURIA, 2010, p. 26). Dessa forma, a linguagem “[...] é entendida como um sistema simbólico fundamental em todos os grupos humanos” (REGO, 1995, p. 53), isso porque possui duas funções básicas: a comunicação (intercâmbio social) e a classificação de objetos (pensamento generalizante) (OLIVEIRA, 1997).

A função de intercâmbio social que a linguagem exerce diz respeito a comunicação entre os homens. Um bebê, por exemplo, que ainda não consegue falar, pode se comunicar com os adultos por meio de gestos e emissão de sons, o que demonstra que a necessidade de comunicação gera o desenvolvimento da linguagem. Entretanto, não basta a emissão de sons para a comunicação, é necessário o estabelecimento de signos que traduzam ideias, sentimentos, vontades, pensamentos, de forma precisa (OLIVEIRA, 1997). Como exemplo tomemos a palavra pássaro. Esta palavra indica significados específicos, que representa ou substitui a realidade, onde podemos traduzir a palavra pássaro como um elemento presente na natureza. Dessa forma, é pelo fato de fornecer significação que a linguagem permite a comunicação entre os sujeitos (REGO, 1995).

Já a função de pensamento generalizante diz que “[...] através da linguagem é possível analisar, abstrair e generalizar as características dos objetos, eventos, situações presentes na realidade” (REGO, 1995, p. 53). Como exemplo, a palavra cachorro possui um significado preciso e determina um conjunto de elementos presentes na natureza. Dessa forma, ao considerar determinado objeto como um cachorro, estaríamos classificando-o na categoria chamada de “cachorro” e, consequentemente, agrupando-o com os demais elementos da mesma categoria e diferenciando-o de elementos de outras categorias como, por exemplo, a categoria “mesa”, “girafa”, “caminhão”, dentre outros (OLIVEIRA, 1997).

É justamente “[...] essa função de pensamento generalizante que torna a linguagem um instrumento de pensamento [...]” (OLIVEIRA, 1997, p. 43), entretanto, essa capacidade de generalizar surge de forma lenta na criança (EMERSON, 2013). “[...] Embora, no início, a linguagem seja uma forma de comunicação entre o adulto e a criança, a linguagem vai assim gradualmente se transformando em uma forma de organização da atividade psicológica humana” (LURIA, 2010, p. 197). Isso significa que a linguagem, somente depois da conversão em fala interior, vem organizar o pensamento do sujeito tornando-se uma função mental interna (VYGOTSKY, 1991).

Essa conversão da linguagem em um instrumento de pensamento, como visto, parte da comunicação entre o adulto e a criança. Sabendo disso, uma das principais preocupações de Vygotsky “[...] era a de analisar a dinâmica do movimento de passagem de ações realizadas no plano social (isto é, entre as pessoas, interpsicológico) para ações internalizadas ou intramentais (no interior do indivíduo, portanto, intrapsicológico)” (REGO, 1995, p. 56). Dessa forma, “antes de o pensamento e a linguagem se associarem, existe, também, na criança pequena, uma fase pré-verbal no desenvolvimento do pensamento e uma fase pré-intelectual no desenvolvimento da linguagem” (OLIVEIRA, 1997, p. 46), que, mais tarde, o pensamento se torna verbal e a fala se torna intelectual (VYGOTSKY, 2009).

Na fase pré-verbal do pensamento, antes de aprender a pronunciar palavras, “[...] a criança demonstra uma inteligência prática que consiste na sua capacidade de agir no ambiente e resolver problemas práticos, inclusive com o auxílio de instrumentos intermediários” (REGO, 1995, p. 64). A criança, então, “[...] é capaz, por exemplo, de subir numa cadeira para alcançar um brinquedo, ou de dar a volta num sofá para pegar uma bolacha que caiu atrás dele” (OLIVEIRA, 1997, p. 46). Nessa fase, a criança pré-verbal exibe uma inteligência prática que permite a ação no ambiente sem a utilização da linguagem, entretanto, apesar de não fazer uso da linguagem como um sistema simbólico, a criança se comunica por meio de manifestações verbais (OLIVEIRA, 1997).

A fase pré-intelectual da fala, na criança, inicia-se nos primeiros meses de vida. Assim, podemos destacar as manifestações verbais como o balbucio, o riso, o choro, as expressões faciais que cumprem a função de alívio emocional e também a comunicação com os membros de seu grupo (REGO, 1995). A fala da criança nessa fase é considerada como uma forma de comportamento emocional (VYGOTSKY, 2009) e “[...] é pré-intelectual no sentido de que ela não tem ainda função de signo” (OLIVEIRA, 1997, p. 45). Portanto, nessa fase, a linguagem é baseada em gestos indicativos e expressões emotivas, isto é, são meios de comunicação que não envolvem a nomeação de objetos e também não há uma conexão entre palavra e objeto (MINICK, 2013).

Tendo em vista o exposto até o momento, temos que “[...] o desenvolvimento da linguagem e do pensamento realiza-se de forma não paralela e desigual” (VYGOTSKY, 2009, p. 111). Nesse sentido, somente após a interação e diálogo da criança com os membros mais maduros de sua cultura, vindo a aprender a usar a linguagem como instrumento do pensamento e como um meio de comunicação (REGO, 1995), que o percurso do pensamento encontra-se com o percurso da linguagem, iniciando uma nova forma de funcionamento psicológico: a fase pré-verbal do pensamento se torna verbal e a fase pré-intelectual da fala se torna intelectual (OLIVEIRA, 1997).

Esse momento crucial, em que o pensamento se torna verbalizado e a fala se torna intelectual, é caracterizado por dois sintomas objetivos: a criança começa a perguntar qual é o nome dos objetos e o seu vocabulário começa a crescer de forma rápida (VYGOTSKY, 2009). Isso se manifesta a partir do momento em que a linguagem e o pensamento se unem e, por esse motivo, "[...] o ser humano passa a ter a possibilidade de um modo de funcionamento psicológico mais sofisticado, mediado pelo sistema simbólico da linguagem" (OLIVEIRA, 1997, p. 47). Dessa forma, em específico, a linguagem como um sistema de pensamento "[...] passa por estágios que obedecem à seguinte trajetória: a fala evolui de uma fala exterior para uma fala egocêntrica e, desta para uma fala interior" (REGO, 1995, p. 65).

"Nas fases iniciais da aquisição da linguagem a criança se utiliza, então, da linguagem externa disponível no seu meio, com a função de comunicar" (OLIVEIRA, 1997, p.52). Nessa fase a comunicação da criança é gestual e ainda não é utilizada como um instrumento de pensamento, por exemplo, a criança pode fazer apelos verbais a um adulto para alcançar um pote de brigadeiro que está em cima de uma geladeira (REGO, 1995). Essa fase, conhecida também como discurso socializado, aos poucos vai se tornando fala interior. Para que isso aconteça a criança precisa passar pelo processo da fala egocêntrica que é "[...] o desenvolvimento direto (ou, melhor, o crescimento para dentro) da linguagem que tinha sido, desde o início, socialmente e ambientalmente orientada" (EMERSON, 2013, p. 152).

Assim, a linguagem egocêntrica "[...] se encontra no caminho de sua interiorização, uma linguagem já metade ininteligível aos circundantes, uma linguagem que já se enraizou fundo no comportamento da criança e ao mesmo tempo ainda é fisiologicamente externa [...]" (VYGOTSKY, 2009, p. 136). Podemos identificar esse tipo de linguagem quando a criança começa a falar alto consigo mesma, independente se há ou não a presença de um adulto (OLIVEIRA, 1997). Esse discurso interior, por exemplo, é como se a criança dissesse para ela mesma durante a solução de um problema: *preciso encontrar uma forma de alcançar esse doce* e, como resposta: *posso utilizar uma escada ou um banco para alcançá-lo* (REGO, 1995). Dessa forma, "ao invés de apelar para o adulto, as crianças passam a apelar a si mesmas; a linguagem passa, assim, a adquirir uma função intrapessoal além do seu uso interpessoal" (VYGOTSKY, 1991, p. 22).

"Quando começa a internalização, o discurso egocêntrico desaparece. A criança se torna, por assim dizer, seu próprio interlocutor. Crucial para esse processo, no entanto, é a presença de um ambiente verbal e físico desafiador" (EMERSON, 2013, p. 153). Isso quer dizer que a internalização da fala possui uma trajetória de fora para dentro do sujeito (OLIVEIRA, 1997). Esse crescimento para dentro, no estágio final do desenvolvimento da linguagem, coincide com a apropriação da memória lógica, da formação de hipóteses, dentre outros processos mentais maduros (EMERSON, 2013).

Assim, com a internalização da linguagem, a criança inicia o processo de "[...] recodificar informações que chegam; quando ela nomeia os objetos e os classifica com base no sistema verbal, [...] quando ela começa novamente a analisar e classificar as impressões obtidas a partir do mundo exterior e a examinar as informações recebidas" (LURIA, 2010, p.197). Finalmente temos aqui, então, o desenvolvimento da função generalizante do pensamento na criança, o que implica que a linguagem se converteu em um instrumento de pensamento. Como visto, isso significa que a criança é capaz de analisar, abstrair, classificar e nomear objetos, ou seja, "no momento que a linguagem é assimilada, a criança fica apta a organizar a percepção e a memória, assimila formas mais complexas de relação sobre objetos do mundo exterior, faz observações e tira conclusões, potencializando o pensamento" (GEBERT, 2019, p. 213).

Diante disso, Vygotsky deu destaque à "palavra" que nada mais é do que uma generalização (significado) ou um conceito (VYGOTSKY, 2009). "O significado é um componente essencial da palavra e é, ao mesmo tempo, um ato de pensamento, pois o significado de uma palavra já é, em si, uma generalização" (OLIVEIRA, 1997, p. 48). Vygotsky voltou então a sua investigação à conversão da palavra, em sua significação em ato de pensamento: "o significado da palavra ganha destaque, uma vez que ele representa seu traço nuclear – o conteúdo da palavra, e, igualmente, se impõe como generalização – como conceito" (MARTINS, 2016, p. 111).

Assim, Vygotsky buscou investigar o desenvolvimento e a formação de conceitos na criança (KOZULIN, 2013), o que vem desempenhar um papel importante em relação ao desenvolvimento humano, porque sintetiza as suas principais teses: "[...] as relações entre pensamento e linguagem, o papel mediador da cultura na constituição do modo de funcionamento psicológico do indivíduo e o processo de internalização de conhecimentos e significados elaborados socialmente" (REGO, 1995, p. 76).

Até aqui, em resumo, temos que Vygotsky buscou investigar o processo de desenvolvimento do pensamento e da linguagem em busca da explicação da consciência humana. Os estudos de Vygotsky destacados até o momento, mostram a sua preocupação em mostrar como a linguagem se transforma em um instrumento de pensamento.

A importância do estudo da linguagem se deve ao fato de exercer a função de comunicação, de interação social além de exercer um papel generalizador do pensamento. A função generalizadora do pensamento possibilita a classificação de objetos, eventos, situações da realidade em suas respectivas categorias e surge de forma gradativa na criança a partir da sua interação com o mundo.

Quando a criança adquire a capacidade de generalizar implica que a linguagem se converteu em um instrumento de pensamento, ou seja, em uma função mental interna. Para que o pensamento e a linguagem se unam, a criança precisa passar por um processo que parte do plano social (interpessoal ou interpsicológico) para o interior do sujeito (intrapessoal ou intrapsicológico).

Dessa forma, existe a fase pré-verbal do desenvolvimento do pensamento, que é a capacidade da criança de agir no meio em que vive sem a utilização da linguagem e, a fase pré-intelectual no desenvolvimento da linguagem, cuja comunicação da criança é emocional caracterizada pelo riso, choro, balbucio.

Até este momento o pensamento e a linguagem estão se desenvolvendo em direções divergentes. Somente com a interação social o pensamento e a linguagem se unirão resultando na conversão do pensamento pré-verbal em verbal e a linguagem pré-intelectual em intelectual. Assim, quando acontece esse fato, a criança começa a perguntar o nome dos objetos e o seu vocabulário começa a crescer.

Especificamente, para que a linguagem se desenvolva como um sistema de pensamento, esta passa por fases, sendo estas:

- A fala exterior, que é caracterizada por uma comunicação gestual da criança com o seu meio onde essa comunicação não é utilizada como instrumento de pensamento;
- A fala egocêntrica, que está no caminho para a interiorização mas ainda há resquícios da fala externa, se caracteriza pelo fato da criança falar consigo mesma, em seu interior, para a resolução de um problema sem a ajuda de um adulto;
- A fala interior, que é quando a linguagem se torna uma função mental na criança, adquirindo então a função generalizante do pensamento.

Com a função de pensamento generalizante, a criança é capaz de classificar objetos e também é capaz de nomeá-los. Assim Vygotsky deu destaque à "palavra" bem como o seu significado. Dessa forma, Vygotsky buscou investigar a conversão da palavra, em sua significação, em ato de pensamento, ou seja, a formação e o desenvolvimento de conceitos na criança.

2.1.3 A formação de conceitos: conceitos espontâneos e conceitos científicos

Vygotsky buscou explicar como os conceitos são formados e desenvolvidos na psique do sujeito. Para ele “[...] os conceitos são entendidos como um sistema de relações e generalização contidos nas palavras e determinados por um processo histórico cultural [...]” (REGO, 1995, p. 76). O processo histórico cultural determina a formação dos conceitos, ou seja, é por meio da inserção do indivíduo na cultura e suas relações com as pessoas, isto é, nesse ambiente sociocultural que “o indivíduo se apropria de conhecimentos por meio de aprendizados formais e não-formais promotores de subsídios para construção dos conceitos científicos e cotidianos” (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 236).

Os conceitos cotidianos ou também chamados de conceitos espontâneos “[...] referem-se àqueles conceitos construídos a partir da observação, manipulação e vivência direta da criança. Por exemplo, a partir de seu dia-a-dia, a criança pode construir o conceito ‘gato’” (REGO, 1995, p. 77). Isso significa que o conceito espontâneo “[...] ocorre através de experiências diretas com os objetos e se manifesta na incapacidade para a abstração, que depende da vontade do sujeito de se relacionar” (BRAGA; DIAS, 2019, p. 181). Assim, esses conceitos formulados no dia-a-dia do sujeito devem ser levados em consideração pelo educador, uma vez que a conexão da criança com o conceito científico é desencadeada pelos conceitos espontâneos (GEBERT, 2019).

Os conceitos científicos, por sua vez, “[...] se relacionam àqueles eventos não diretamente acessíveis à observação ou ação imediata da criança: são os conhecimentos sistematizados, adquiridos nas interações escolarizadas” (REGO, 1995, p. 77). Esses conhecimentos abstratos se desenvolvem e respondem a uma atividade espontânea do pensamento que não se origina simplesmente por meio de um processo mecânico, “[...] ou seja, a memorização da palavra e a sua relação com o objeto não necessariamente conduzem a uma formação conceitual (BRAGA; DIAS, 2019, p. 181). Portanto, o processo de formação dos conceitos científicos não são aprendidos por meio de treinamento mecânico e também não podem ser meramente transmitidos pelo professor, mas sim é um longo e complexo processo pois envolve atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e classificar, o que exige uma intensa atividade mental por parte do sujeito (REGO, 1995).

Além de exigir uma intensa atividade mental, o pensamento científico é uma conquista que não só depende do esforço individual mas também do contexto em que o sujeito está inserido: “Vygotsky ressalta, no entanto, que se o meio ambiente não desafiar, exigir e estimular o intelecto do adolescente, esse processo poderá se atrasar ou mesmo não se completar, ou seja, poderá não chegar a conquistar estágios mais elevados de raciocínio” (REGO, 1995, p. 79). Dessa forma, primeiramente, para que aconteça “[...] o desenvolvimento dos conceitos científicos, deve haver um determinado nível de maturação dos conceitos cotidianos" (BRAGA; DIAS, 2019, p. 183). Isso porque são os conceitos espontâneos que levam o pensamento quotidiano do sujeito para dentro da estrutura organizada dos conceitos científicos fazendo com que estes ganhem vigor e um amplo aspecto de aplicações (DANIELS, 2013). Dessa forma, o processo de formação de conceitos na criança requer três fases: o pensamento sincrético, o pensamento por complexos e o pensamento conceitual (FONSECA-JANES; LIMA, 2013).

"O primeiro estágio, entendido como pensamento sincrético, é entendido como uma espécie de fusão entre realidade e fantasia, na qual a criança combina aleatoriamente as informações que recebe do meio às experiências pessoais" (BRAGA; DIAS, 2019, p. 188). Especificamente, nessa fase, manifestada em crianças em seus anos iniciais de vida, se caracteriza pelo fato da indefinição do significado da palavra ou do signo que a substitui o que quer dizer que há na criança uma ausência da significação simbólica do mundo (MARTINS, 2016). Dessa forma, a criança, quando desfiada a resolver um problema, apresenta um combinado de realidade e fantasia sem discernimento sobre a realidade e esse pensamento infantil é fruto de influências recebidas, fruto de suas vivências, fantasias, cultura e o ambiente em que a criança está inserida (BRAGA; DIAS, 2019).

A segunda fase, entendida como pensamento por complexos, "[...] é caracterizada pela transitoriedade e variabilidade do pensamento, ou seja, as crianças agrupam os objetos por suas próprias características e não por um traço estável (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235). Enquanto no primeiro estágio a criança classifica aleatoriamente as informações que recebe do meio, neste estágio a criança já consegue distinguir informações: a criança classifica os objetos de acordo com as suas características: "[...] a criança começa a unificar objetos homogêneos em um grupo comum, a complexificá-los já segundo as leis dos vínculos objetivos que ela descobre em tais objetos" (VYGOTSKY, 2009, p. 179). Assim, a função do pensamento por complexos "[...] é estabelecer elos e relações entre os elementos para que ocorram as generalizações futuras" (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235). Isso quer dizer que o pensamento por complexos abarca a união ou a generalização de objetos diferentes tendo como base a variação de vínculos entres eles, embora esses vínculos ecoam como manifestações exteriores (MARTINS, 2016) onde "a criança utiliza-se de abstrações e experiências imediatas e rasas, não inseridas no plano do pensamento lógico" (BRAGA; DIAS, 2019, p. 188).

Dentro do pensamento por complexos podemos distinguir cinco diferentes estágios: complexo associativo, por coleção, por cadeia, complexos difusos e pseudoconceito. O complexo associativo "[...] baseia-se em conexões associativas entre traços que a criança reconhece comuns entre os objetos. Em torno desse traço, a exemplo de cor, forma, dimensão etc., que se converte no núcleo do complexo associativo, constrói todo o complexo" (MARTINS, 2016, p. 114). Para exemplificarmos essa afirmação, tomemos um grupo compostos por figuras geométricas sendo estas figuras de forma quadrada e retangular. Se pedirmos a uma criança que inclua nesse mesmo grupo outras figuras geométricas, provavelmente, a criança incluiria formas triangulares, bem como figuras em forma de paralelogramo. Isso se deve pelo fato de que a criança teve como referência os vértices das figuras geométricas, ou seja, o vértice é a referência nuclear para a inclusão das formas triangulares e as figuras em forma de paralelogramo no grupo das figuras geométricas em suas forma quadrada e retangular (BRAGA; DIAS, 2019). Portanto, "[...] qualquer ligação associativa entre o núcleo e um objeto do complexo é suficiente para fazer com que a criança inclua esse objeto no grupo e o designe pelo nome de família comum" (VYGOTSKY, 2009, p. 182).

Já o complexo de coleções a criança classifica os objetos concretos conforme as características que os diferem e as características complementares entre si (FONSECA-JANES; LIMA, 2013). Utilizando-se do exemplo dado anteriormente sobre as figuras geométricas, neste caso referente ao estágio complexo de coleções, a criança "[...] faria combinações não mais restritas às formas geométricas, mas sim encaixaria dentro do contexto as cores diferenciadas" (BRAGA; DIAS, 2019, p. 189). Assim, enquanto no complexo associativo a criança classifica os objetos concretos conforme os traços comuns entre ambos, no complexo de coleção "[...] os diferentes objetos concretos se combinam com base em uma complementação mútua segundo algum traço e formam um todo único constituído de partes heterogêneas que se intercomplementam" (VYGOTSKY, 2009, p. 183).

Em relação ao complexo por cadeia, os objetos concretos podem ser classificados podendo faltar um núcleo estrutural que os associe, o que significa que um elemento do complexo pode não ter qualquer semelhança com o último. Por exemplo, os elementos árvore, pássaro, céu, nuvem, avião etc., "[...] nesse tipo de complexo pode faltar completamente um núcleo estrutural – quer associativo quer funcional, de tal forma que o primeiro elemento da cadeia pode não ter nenhuma relação com o último [...]" (MARTINS, 2016, p. 115). Isso significa que, a criança escolhe um ou vários objetos concretos associados em algum sentido e continua a reunir objetos concretos tendo como orientação algum traço secundário do objeto anteriormente escolhido. Dessa forma, por exemplo, a criança escolhe um triângulo amarelo e o reúne com os demais triângulos amarelos, entretanto, a criança pode se sentir atraída pela cor azul de um outro triângulo o que faz com que a criança acrescente ao conjunto outras formas geométricas azuis tais como semicirculares e circulares (VYGOTSKY, 2009). Portanto, o complexo por cadeia é “[...] uma junção dinâmica e consecutiva de elos isolados em uma única corrente, com a transmissão de significado de um elo para o outro (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235).

Na fase dos complexos difusos, “[...] as generalizações criadas pelo pensamento da criança começam a ultrapassar a exclusividade das esferas do pensamento visual e prático, resultando de conexões inferidas por ela a partir de relações que se desdobram de outras relações “[...] (MARTINS, 2016, p. 115). Por exemplo, ao escolher um triângulo amarelo, a criança também pode escolher, em seguida, um trapézio. Isso acontece porque se cortamos os vértices do trapézio este lembrará um triângulo. Temos aqui então um desdobramento do triângulo em trapézio. “Depois, os trapézios juntam-se os quadrados, quadrados os hexágonos, aos hexágonos os semicírculos e posteriormente os círculos” (VYGOTSKY, 2009, p. 188). Dessa forma, os grupos são formandos a partir da percepção da criança em relação à imagens concretas gerando conexões ilimitadas (BRAGA; DIAS, 2019), o que significa que a criança é inserida “[...] em um mundo de generalizações difusas, onde os traços escorregam e oscilam, transformando-se imperceptivelmente uns nos outros” (VYGOSYKY, 2009, p. 189).

Por fim, a quinta e última fase do pensamento por complexos, que é o complexo de pseudoconceito, as generalizações realizadas pela criança se assemelham aos conceitos dos adultos, isto é, se assemelham porque ainda não são um conceito propriamente dito. Nessa fase, as generalizações realizadas pela criança não são um conceito de fato porque a criança não desenvolve espontaneamente o significado da palavra: “[...] na base da formação dos pseudoconceitos não estão postas relações que a criança estabelece de modo relativamente livre, mas relações que ela constrói levando em conta a palavra (‘conceito’) dada pela linguagem do adulto” (MARTINS, 2016, p. 116). Dessa forma, nessa fase a criança demonstra amplo domínio de termos com a aparência de conceitos, entretanto, isso não significa que a criança consiga pensar abstratamente (MARTINS, 2016). Portanto, “em termos externos, temos diante de nós um conceito, em termos internos, um complexo” (VYGOTSKY, 2009, p. 190).

Além do pensamento por complexos há a fase do pensamento conceitual que se divide em duas fases: o desenvolvimento por abstração e o estágio de conceitos potenciais. No estágio de desenvolvimento por abstração, a criança classifica os objetos baseando-se “[...] no grau máximo de semelhanças entre os componentes. Em tal estágio, a criança abstrai todo um conjunto de características sem distingui-las claramente entre si. Essa abstração é baseada numa atribuição superficial dos objetos” (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235). Assim, por exemplo, digamos que há um conjunto composto por objetos concretos com traços contendo o máximo de semelhança com o modelo que foi dado a criança. Esses traços colocam-se no centro da atenção da criança, que se destacam e são abstraídos por ela. Acontece que essa abstração é superficial pois há demais traços de semelhança em derredor da atenção da criança. Dessa forma, segundo Vygotsky (2009), o objeto concreto integra o conjunto, insere-se na generalização, entretanto, deixa de fora desse conjunto uma parte de seus atributos e sua plenitude real. Essa generalização que a criança constrói é mais pobre e ao mesmo tempo é mais rica que o pseudoconceito: é mais pobre devido ao uso da máxima semelhança a qual desempenha vínculos paupérrimos entre os objetos e, ao mesmo tempo, essa generalização é rica em relação aos pseudoconceitos devido aos atributos que levaram a criança a incluir o objeto concreto no conjunto, cujos atributos, ainda que superficiais, manifestam-se com relevo especial no pensamento da criança (VYGOTSKY, 2009).

Já "no estágio dos conceitos potenciais, a criança realiza agrupamentos com base num único atributo do objeto" (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235). Mesmo se baseando em um único atributo do objeto (o seu formato ou a sua cor) e tendo como aparência do conceito de fato, os conceitos potenciais se assemelham aos pseudoconceitos pelo fato de que ainda são conceitos prontos, não desenvolvidos espontaneamente pela criança: "essa aparência enganosa e essa semelhança externa como verdadeiro conceito familiarizam o conceito potencial com o pseudoconceito" (VYGOTSKY, 2009, p. 222). Portanto, temos uma das formações dos conceitos potencias denominada como pensamento perceptual, cujos "[...] agrupamentos pautam-se nas impressões semelhantes que a criança tem do objeto" (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235).

A outra formação dos conceitos potenciais é o pensamento prático que "[...] está pautada nos significados funcionais semelhantes que a criança tem do objeto" (FONSECA-JANES; LIMA, 2013, p. 235). Dessa forma, a diferença do conceito potencial para o conceito verdadeiro é que no potencial a criança, em muitas vezes, utiliza apenas o atributo funcional da palavra, ou seja, a criança ainda não alcançou a abstração completa: "quando se pede a uma criança que explique uma palavra, ela responde dizendo o que o objeto designado pela palavra pode fazer, ou – mais frequentemente – o que pode ser feito com ele" (VYGOTSKY, 2009, p. 225). Já o conceito verdadeiro, surge quando os atributos dos objetos concretos abstraídos pela criança começam a sintetizar-se e, em seguida, tornar-se base no pensamento da criança levando-a a tomar conhecimento da realidade que a cerca (VYGOTSKY, 2009).

A intersecção entre os conceitos potenciais e os conceitos verdadeiros demanda um percurso que estende até a adolescência, resultando na capacidade de a criança pensar abstratamente: "alcançando esse patamar de desenvolvimento, junto ao qual operam todas as funções psíquicas, o pensamento por conceitos torna-se o guia das transformações mais decisivas do psiquismo e, por conseguinte, da personalidade do indivíduo” (MARTINS, 2016, p. 116-117). Assim, o adolescente é capaz de pensar abstratamente sem necessidade de uma experiência concreta. Isso significa que “[...] o indivíduo tem plenas condições de aplicar uma palavra em diferentes contextos e em situações complexas (BRAGA; DIAS, 2019, p. 190). Portanto, esta é a fase cuja capacidade de pensar conceitualmente é desenvolvida na criança: tanto conceitos em sua forma espontânea (experiência prática da criança em seu meio) quanto em sua forma científica (adquiridos nas interações escolarizadas), como mencionado anteriormente.

Em resumo, o processo de formação de conceitos tem o seu início desde os primeiros anos de vida da criança e se concretiza na fase da adolescência. Dessa forma, três fases são destacadas no processo de formação de conceitos: o pensamento sincrético, o pensamento por complexos e o pensamento conceitual.

O último, sendo o pensamento conceitual, ramificado em desenvolvimento por abstração e conceitos potenciais, se assemelha aos pseudoconceitos que é um tipo de complexo onde as generalizações que a criança faz se assemelha a dos adultos, entretanto, ainda não é um conceito verdadeiro. Dessa forma, temos que essa terceira fase “[...] serve como ponte transitória para um estágio novo e superior: a formação de conceitos” (VYGOTSKY, 2009, p.190).

Em suma, temos que a formação de conceitos na criança é desencadeada por um processo histórico cultural. A criança é capaz de formar conceitos espontâneos que são desencadeados a partir de sua observação e sua vivência direta. Esses conceitos devem ser levados em consideração pelo professor para a formação dos conceitos científicos, que são conhecimentos sistematizados que podem ser desenvolvidos na escola.

2.1.4 Zona de desenvolvimento proximal

Para a formação de conceitos científicos, o professor deve se atentar a um aspecto: a zona de desenvolvimento proximal. A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é a distância entre o nível de desenvolvimento real e potencial da criança. O nível de desenvolvimento real consiste na capacidade da criança em realizar sozinha alguma tarefa: “[...] o nível de desenvolvimento real da criança caracteriza o desenvolvimento de forma retrospectiva, ou seja, refere-se a etapas já alcançadas, já conquistadas pela criança” (OLIVEIRA, 1997, p. 59). Assim, a criança não mais necessita do auxílio de pessoas mais experientes para realizar determinadas tarefas, isso porque os seus processos mentais já se estabeleceram resultando na capacidade de realizar as tarefas autonomamente. Portanto, ao olharmos a capacidade de realizar autonomamente atividades ou tarefas como, por exemplo, “[...] andar de bicicleta, cortar com a tesoura ou resolver determinado problema matemático, estamos tratando de um nível de desenvolvimento já estabelecido, isto é, estamos olhando o desenvolvimento retrospectivamente” (REGO, 1995, p. 73).

Já a capacidade da criança em realizar determinadas tarefas ou solucionar problemas sob orientação de outras pessoas, é chamada de nível de desenvolvimento potencial: “há tarefas que uma criança não é capaz de realizar sozinha, mas que se torna capaz de realizar se alguém lhe der instruções, fizer uma demonstração, fornecer pistas, ou der assistência durante o processo” (OLIVEIRA, 1997, p. 59). Como exemplo, uma criança de cinco anos de idade, ao montar um quebra-cabeças com muitas peças, pode sentir dificuldade e assim recorrer à ajuda de alguém mais experiente, como o seu irmão mais velho ou até mesmo alguém de sua idade que já tenha a experiência em montar quebra-cabeças (REGO, 1995). É possível que com a ajuda do outro a criança consiga um aproveitamento maior e um resultado mais avançado comparado ao fato de realizar sozinha a tarefa. Entretanto, não é qualquer sujeito que, mesmo com o auxílio de uma pessoa mais experiente, consiga realizar qualquer tarefa: por exemplo, uma criança de cinco anos pode ser capaz de construir sozinha uma torre com cubos de diversos tamanhos; “[...] uma de três anos não consegue construí-la sozinha, mas pode conseguir com a assistência de alguém; uma criança de um ano não conseguiria realizar essa tarefa, nem mesmo com ajuda” (OLIVEIRA, 1997, p. 60).

Dessa forma, o fato de a criança realizar determinadas tarefas sob a orientação de alguém mais experiente não implica o êxito. Isso por que a capacidade de resolver determinados problemas depende do grau de desenvolvimento das funções psicológicas da criança (OLIVEIRA, 1997). Dessa forma, só se beneficiaria do auxílio de outra pessoa mais experiente para construir a torre de cubos de diversos tamanhos, se a criança já desencadeou o processo de desenvolvimento dessa habilidade. Assim, é necessário que o professor conheça o nível de desenvolvimento de seus alunos e o impulsione a partir dali dirigindo “[...] o ensino não para etapas intelectuais já alcançadas, mas sim para estágios de desenvolvimento ainda não incorporados pelos alunos, funcionando como um motor de novas conquistas psicológicas” (OLIVEIRA, 1997, p. 62). O professor, portanto, deve ter como ponto de partida aquilo que a criança consegue realizar sozinha (nível de desenvolvimento real) e como ponto de chegada os objetivos estabelecidos pela escola referentes à faixa etária e ao nível de conhecimentos e habilidades da criança (OLIVEIRA, 1997).

Com relação ao "ponto de partida", acontece que o aprendizado da criança começa muito antes de ela começar a frequentar a escola: "por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração, e determinação de tamanho" (VYGOTSKY, 1991, p. 56). A diferença do aprendizado pré-escolar e o que a criança poderá aprender na escola é que o primeiro não é um saber sistematizado enquanto o segundo é sistematizado e, além disso, produz e estimula a zona de desenvolvimento proximal (VYGOTSKY, 1991), que se refere "[...] aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário" (VYGOTSKY, 1991, p. 58). Dessa forma, a zona de desenvolvimento proximal é o caminho que o sujeito irá percorrer para o desenvolvimento das funções que estão em processo de amadurecimento (OLIVEIRA, 1997) e esse caminho deve ser levado em consideração pelo professor porque "a zona de desenvolvimento proximal é uma ferramenta analítica necessária para planejar o ensino e explicar seus resultados (HEDEGAARD, 2013, p. 200).

Esse caminho é guiado pelo professor com o ensino dos conceitos científicos de forma que esses conceitos possam se entrelaçar aos conceitos espontâneos da criança tornando-se também espontâneos (HEDEGAARD, 2013). Assim, "o professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente" (OLIVEIRA, 1997, p. 62). Esses avanços podem ser desencadeados com a promoção do bom ensino, onde a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento (OLIVEIRA, 1997), ou seja, o sujeito se desenvolve enquanto aprende.

Os procedimentos que o professor pode aderir para impulsionar o bom ensino e consequentemente, o desenvolvimento dos sujeitos são, por exemplo, demonstrações, assistências, fornecimento de pistas, instruções e a interação com outras pessoas (o próprio professor e as demais crianças) (OLIVEIRA, 1997). Dessa forma, para o amadurecimento das funções embrionárias localizadas na zona de desenvolvimento proximal é necessária a troca de experiências entre as crianças: "A ZDP proporciona o ambiente onde o social e o individual são postos em contato" (DANIELS, 2013, p. 8). Essa interação tem a linguagem como instrumento mediador: "É na ZDP que as assim chamadas 'ferramentas psicológicas' (sobretudo a fala) e signos psicológicos têm uma função de mediação" (DANIELS, 2013, p. 8).

Com a interação, a criança coloca "[...] em movimento vários processos de desenvolvimento que, sem a ajuda externa, seriam impossíveis de ocorrer. Esses processos se internalizam e passam a fazer parte das aquisições do seu desenvolvimento individual" (REGO, 1995, p. 74). Isso acontece porque as crianças são sempre heterogêneas com relação aos conhecimentos já adquiridos nas diversas áreas. Com isso uma criança que tenha um conhecimento maior sobre determinado assunto pode contribuir para o desenvolvimento das outras (OLIVEIRA, 1997). Entretanto, embora as crianças sejam heterogêneas, estas compartilham traços em comum. Assim, o ensino pode ser construído com base nos aspectos comuns entre as crianças levando em consideração que cada criança possui a sua forma e velocidade de aprendizagem (HEDEGAARD, 2013). Com isso, a zona de desenvolvimento proximal pode ser trabalhada “[...] como uma relação entre as etapas planejadas do ensino e as etapas do processo de aprendizagem/aquisição das crianças” (HEDEGAARD, 2013, p. 224).

Ao contrário disso, geralmente, nas escolas, são dados testes aos estudantes onde o professor mede o grau de desenvolvimento pela capacidade em responder individualmente e corretamente os problemas elaborados: “apresentamos às crianças uma bateria de testes ou várias tarefas com graus variados de dificuldades e julgamos a extensão de seu desenvolvimento mental baseados em como e [...] que grau de dificuldade elas os resolvem” (VYGOTSKY, 1991, p. 57). Por outro lado, quando as tarefas são realizadas em grupo, quando o professor fornece pistas de como resolver um problema, pode ser considerado, pela maioria dos educadores, como ações que não possibilitam a aprendizagem (VYGOTSKY, 1991). Dessa forma, esses educadores não consideram que as tarefas que a criança consegue realizar com o auxílio de alguém mais experiente poderia ser, de alguma forma, um indicativo de seu desenvolvimento mental sobre uma tarefa que ela pode vir a fazer sozinha. (VYGOTSKY, 1991).

Além disso, quando há realização de tarefas em grupo há a questão da imitação que é vista como um processo mecânico (OLIVEIRA, 1997), entretanto, “[...] é a forma principal em que se realiza a influência da aprendizagem sobre o desenvolvimento. A aprendizagem da fala, a aprendizagem na escola se organiza amplamente com base na imitação” (VYGOTSKY, 2009, p. 331). Dessa forma, a imitação é vista não como uma forma de fazer igual ao outro, não é a cópia de um modelo, mas é a reconstrução individual daquilo que a criança observa nos outros. É uma oportunidade de realizar ações que estão além de suas capacidades de realizá-las sozinha o que contribui para o seu desenvolvimento (OLIVEIRA, 1997), entretanto, a imitação contribui para o desenvolvimento desde que determinadas ações estejam dentro da sua zona de desenvolvimento proximal.

Para ilustrarmos essa ideia, uma a criança ao imitar a linguagem ou a escrita de alguém está estimulando o desenvolvimento da sua própria capacidade de falar e escrever. Por outro lado, uma criança com poucos meses de vida não consegue imitar a linguagem ou a escrita de um adulto. Outro exemplo é se uma criança tem dificuldade em aritmética e o professor resolve no quadro-negro um problema referente, “[...] a criança pode captar a solução num instante. Se, no entanto, o professor solucionasse o problema usando a matemática superior, a criança seria incapaz de compreender a solução, não importando quantas vezes a copiasse” (VYGOTSKY, 1991, p. 59). Portanto, como visto, esses exemplos mostram que “[...] só é possível a imitação de ações que estão dentro da zona de desenvolvimento proximal do sujeito” (OLIVIEIRA, 1997, p. 63).

Dessa forma, utilizar da imitação no processo de ensino-aprendizagem pode ser vista como forma de permitir a elaboração de uma função psicológica no nível interpsíquico para o intrapsíquico, ou seja, de atividades realizadas em coletivo para o interior do sujeito (OLIVEIRA, 1997), isto é, como visto, desde que esteja dentro da zona de desenvolvimento proximal da criança. Assim, aquilo que está situado na zona de desenvolvimento proximal da criança, em um estágio de certa idade, realiza-se e passa ao nível do desenvolvimento real (VYGOTSKY, 2009), ou seja, aquilo que a criança realiza com assistência hoje, conseguirá realizar autonomamente amanhã (VYGOTSKY, 1991).

Portanto, é necessário que o professor leve em consideração o ensino dos conceitos científicos partindo do nível de desenvolvimento real da criança, ou seja, aquilo que a criança já sabe ou melhor: os seus conceitos espontâneos. Como vimos, a zona de desenvolvimento proximal refere-se aquelas funções que ainda não amadureceram e que estão localizadas entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. Assim é necessário que o professor planeje o ensino a fim de desenvolver as funções que estão sem seu estado embrionário, que se localizam na zona de desenvolvimento proximal da criança.

Para isso, atividades que forneçam pistas para a solução de problemas, que há demonstrações e interações com outras pessoas, estimulam a zona de desenvolvimento proximal da criança o que mais tarde resulta na internalização das funções que antes estavam em processo de amadurecimento. Dessa forma, a realização de atividades com o auxílio de alguém mais experiente (nível de desenvolvimento potencial) estimula a zona de desenvolvimento proximal da criança onde, mais tarde, as funções que eram embrionárias amadurecem e são internalizadas pela criança (nível de desenvolvimento real).

2.2 A Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov

A Teoria Histórico-cultural de Vygotsky foi ampliada e aprofundada por outros pesquisadores também interessados na formação e no desenvolvimento das funções psicológicas humanas. Um desses estudiosos é Vasili Vasilievich Davydov (1930 – 1998).

Davydov "[...] foi um pedagogo e psicólogo russo que realizou amplas investigações acerca das relações entre o ensino dos conteúdos escolares e o desenvolvimento psicológico de crianças e jovens em idade escolar" (FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 75). Essas investigações começaram a surgir por que "ele considerava insuficiente a escola que passava aos alunos apenas informações e fatos isolados" (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 331). Ao contrário disso, Davydov defendia o que as escolas impulsionassem o desenvolvimento mental, subjetivo dos alunos por meio de um projeto de ensino que estimulasse o pensamento dialético em relação aos objetos e questões da realidade (FREITAS; ROSA, 2015).

Especificamente, Davydov começou a pesquisar sobre o ensino das escolas russas, constatando que a base do ensino dessas escolas é o pensamento empírico, descritivo e classificatório e não baseado em uma busca do desenvolvimento do pensamento teórico do aluno em relação a um objeto. A partir disso, Davydov começou a ampliar as formulações de Vygotsky sobre a generalização e a formação dos conceitos científicos defendendo que as escolas precisariam impulsionar o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno, isso por que "[...] é o pensamento teórico o que caracteriza fortemente o conhecimento científico" (FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 78). Assim, para o desenvolvimento do pensamento teórico, Davydov defende o estímulo do pensamento dialético, ou seja, que o ensino parta do abstrato em direção ao concreto: "A exposição do conhecimento científico se realiza pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, em que se utilizam as abstrações e generalizações substantivas e os conceitos teóricos" (DAVYDOV, 1988, p. 165).

Para compreendermos o que significa a ascensão do abstrato ao concreto a partir do qual se realiza o pensamento teórico, recorremos, primeiramente, à explanação do que é um objeto, o que é um conceito, o que é o pensamento empírico e teórico em relação a um objeto. Após isso, explanaremos como o professor pode planejar e organizar o ensino de forma a desenvolver o pensamento teórico no aluno. Assim, torna-se necessário o conhecimento do pensamento empírico e teórico porque as descobertas, criações, elaborações sistemáticas produzidas nas mais diversas áreas de conhecimento desenvolvem-se historicamente tendo-os como base (FREITAS, 2016). Dessa forma, "os professores precisam saber em que consistem esses tipos de pensamento, que consequências produzem no desenvolvimento do pensamento dos alunos e como promovê-los no ensino" (FREITAS, 2016, p. 393).

2.2.1 A formação de conceitos: pensamento empírico e teórico

A Teoria do Ensino Desenvolvimental compreende a importância do papel da escola e do ensino para que, desde as series iniciais, a criança seja levada ao desenvolvimento psicológico e sociocultural (FREITAS; ROSA, 2015). Para isso, Davydov, se baseando na Teoria Histórico-cultural de Vygotsky, segue o princípio de que o ensino precisa "[...] proporcionar aos alunos a apropriação da cultura produzida e acumulada social e historicamente (ciência, arte, cultura, ética, técnica), oferecendo-lhes a oportunidade de ampliarem seus conceitos e formarem novas funções psíquicas superiores" [...] (FREITAS, 2016, p. 390).

Davydov, ao investigar sobre o desenvolvimento da atividade mental humana, considerou que o ensino organizado e sistematizado não só possui um papel fundamental na formação das funções psicológicas superiores como a memória, atenção, consciência e a reflexão, mas também em transmitir a cultura humana acumulada historicamente. Isso por que "[...] o ensino faz certas exigências mentais que necessariamente ampliam as capacidades de pensamento do indivíduo, favorecendo novas aprendizagens e novas e melhores funções, numa espiral de desenvolvimento tanto da mente quanto da cultura adquirida" (FREITAS, LIMONTA, 2012, p. 76).

As exigências mentais que o ensino organizado e sistematizado faz no sujeito são "[...] diferentes daquelas que se apresentam em sua vida social fora da escola, uma vez que não se referem ao conhecimento estruturado com base na lógica científica" (FREITAS, 2016, p. 390). O conhecimento científico, que é defendido por Davydov, é um objeto cultural que impulsiona o desenvolvimento da atividade mental da criança, ou seja, a aprendizagem (FREITAS; LIMONTA, 2012). Assim, um objeto cultural é um conhecimento historicamente e culturalmente produzido por pesquisadores, estudiosos e cientistas que, para Davydov, o sujeito ao se apropriar deste reproduz em si mesmo as capacidades mentais e sociais ligadas a esse objeto (FREITAS; LIMONTA, 2012).

Reproduzir em si mesmo o conhecimento sobre um objeto, "[...] não é a assimilação-reprodução do mundo tal como as crianças o veem ou tal como os adultos lhes ensinam" (FREITAS; ROSA, 2015, p. 620), mas é ver o objeto "[...] pelos olhos do outro, neste caso o cientista, o pesquisador" (FREITAS; ROSA, 2015, p. 620). Por exemplo, um professor de matemática ao comunicar ao aluno o que é soma de fração, está compartilhando o seu conhecimento de acordo com o que compreendeu sobre o que é soma de fração, ou seja, comunica a sua ideia sobre esse conteúdo matemático. O aluno, que recebe do professor a informação sobre o que é soma de fração, começa a reorganizar e organizar em sua mente esse conhecimento culturalmente desenvolvido dando-o novos significados de acordo com o seu meio social. Dessa forma, podemos dizer que “o mundo é comunicado à criança por meio da comunicação compartilhada de significados que os outros possuem [...]” (FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 77).

O desenvolvimento da atividade mental só é possível a partir da troca de experiências com o outro e com os objetos da cultura, ou seja, por meio de uma comunicação compartilhada. Primeiramente num processo interpsicológico o sujeito avança com o desenvolvimento de sua atividade mental tendo a experiência histórica, sobre determinado objeto da cultura, como base para esse processo. Depois, em um processo intrapsicológico, o sujeito interioriza e reproduz de forma individual o processo histórico-social sobre determinado objeto cultural. Assim, o desenvolvimento da atividade mental não é uma adaptação do homem ao meio mas é uma comunicação compartilhada sobre determinado objeto cultural que se interioriza posteriormente no sujeito reproduzindo-se de forma individual (FREITAS; LIMONTA, 2012).

Diante disso, para que ocorra esse processo de internalização, Davydov privilegia o ensino voltado ao desenvolvimento do pensamento por meio de mudanças qualitativas na atividade mental do sujeito onde a forma de possibilitar essa mudança é o ensino voltado à formação de conceitos (PERES; FREITAS, 2014). Os conceitos estão relacionados à ciência, à arte, à filosofia, e são constituídos no decorrer da experiência humana social e histórica a partir de métodos, formas de pensamento, reflexão e ação (FREITAS, 2016). Especificamente, os conceitos estão relacionados aos objetos culturais: “o conceito é a forma refletida e pensada do objeto, [...] elaborada em forma abstrata, geral e universal, e apresentada como um sistema de relações dentro de uma área do conhecimento” (FREITAS, 2016, p. 391).

Para ilustramos essa afirmação, tomemos o conceito soma de fração com denominadores iguais e diferentes. Esse conceito se inter-relaciona com outros conhecimentos que compõem a grande área de conhecimento que é a matemática, tais como, a noção do que é uma fração, como a fração é representada numericamente, como comparar frações, frações equivalentes, etc. Dessa forma, para compreendermos o processo de se somar frações é necessário compreender os conceitos que estão inter-relacionados, ou seja, conceitos antecedentes.

Além de inter-relacionar com a própria área de conhecimento, um conceito também pode se inter-relacionar com outra áreas, por exemplo a soma de fração pode estar presente na física, na biologia, etc. Assim, podemos considerar que “os conceitos não são fixos, imóveis, mortos, isolados. Eles possuem um movimento, uma plasticidade e elasticidade universal e multifacética, e devem ser trabalhados de modo flexível, móvel, relacionados entre si, unidos em oposições, em contradições" (FREITAS, 2016, p. 392).

Ao ensinar um conceito ao aluno, o professor também ensina uma ferramenta que possui a função, além de servir de elo com outros conceitos, de servir com a vida cotidiana e pessoal do aluno onde este começa a compreender os objetos culturais que fazem parte do seu dia a dia de uma forma consciente e elaborada (FREITAS; ROSA, 2015). Portanto, "ao comunicar à criança um determinado conceito, por meio da linguagem e de objetos culturais, o professor comunica também uma ferramenta de pensamento que serve de elo de associação com outros conceitos e com a vida cotidiana e pessoal dessa criança" (FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 78).

Para ilustrarmos essa afirmação temos que o professor, após dar uma aula de forma sistematizada e organizada sobre frações, expõe a importância da fração, por exemplo, ao se fazer um bolo, ao se fazer medições de determinadas áreas, dentre outras possibilidades de utilização das frações no cotidiano. Dessa forma, o aluno pode voltar para a sua casa compreendendo melhor o conceito de fração o que contribui para a ampliação de sua percepção sobre o mundo que o cerca e, além disso, pode até compartilhar com outras pessoas o conhecimento interiorizado na escola. Isso significa que quando a criança interioriza um conceito e o aplica em seu cotidiano está pensamento teoricamente (FREITAS, LIMONTA, 2012).

Pensar teoricamente é diferente de pensar empiricamente sobre um objeto cultural. As descobertas, criações, elaborações produzidas nas mais diversas áreas de conhecimento desenvolvem-se historicamente tendo o pensamento empírico e teórico como base (FREITAS, 2016). Sobre o pensamento empírico, segundo Hedegaard (2013, p. 205), este "[...] surge por meio da observação e comparação de fenômenos [...]". Isso significa que, no pensamento empírico, a consciência e o raciocínios estão voltados para classificação dos objetos e para as suas manifestações exteriores possibilitando a generalização formal ou empírica (LIBÂNEO; FREITAS, 2013)

Dessa forma, por exemplo, ao perguntarmos ao aluno qual é o conceito de pirâmide este poderá dizer que é uma figura geométrica espacial, que possui arestas, faces e vértices e uma base que pode ser triangular, quadrangular, etc. Isso demonstra a predominância do pensamento empírico que é sustentado naquilo que o aluno observa no exterior do objeto de conhecimento. Aqui o aluno se atenta as características do objeto e deixa de lado o fato de que este possui uma essência que só se mostrará em um processo de investigação de sua origem. Portanto, no pensamento empírico, "[...] as dependências internas essenciais não podem ser observadas diretamente, pois na existência presente, formada, resultante e dissociada, elas já não estão dadas. O interno se descobre nas mediatizações em sua formação, em um sistema dentro do todo" (DAVYDOV, 1988, p. 132).

Mesmo que o pensamento empírico se paute em traços externos, aparentes, etc., dos objetos, é possível reconhecer a sua contribuição no desenvolvimento do aluno devido ao fato de que "[...] possibilita ações mentais de sistematização, classificação, hierarquização de objetos, como por exemplo, plantas, animais, palavras, figuras geométricas, elementos químicos, rochas etc" (FREITAS, 2016, p. 396). Entretanto, embora essas ações mentais sejam importantes, o pensamento empírico não deve ser o tipo de pensamento predominante, mas sim um degrau inicial para o pensamento teórico (FREITAS, 2016). Isso porque, o pensamento empírico possibilita a apropriação somente da forma externa do objeto e dispensa as propriedades essências destes fazendo com o que os alunos não se apropriem dos conceitos em sua totalidade (FREITAS, 2016).

Diferentemente do pensamento empírico, o desenvolvimento do pensamento teórico é defendido por Davydov porque "trata-se de um processo pelo qual se revela a essência, a origem e o desenvolvimento dos objetos de conhecimento como caminho de construção do conceito" (LIBÂNEO, 2009, p.19). O pensamento teórico permite acessar a essência do objeto por que, para este pensamento, "[...] não é suficiente apenas classificar os objetos e fenômenos a partir da observação direta de suas características particulares e imediatas, pois o que de fato o constitui é a sua essência [...]" (PERES; FREITAS, 2014, p. 20). Portanto, temos que a abstração, generalização e o conceito no pensamento empírico se pautam nos traços externos e, no pensamento teórico, se pautam nas conexões internas do objeto (PERES; FREITAS, 2014).

Tanto o pensamento empírico quanto o pensamento teórico envolvem abstração, generalização e conceito, entretanto, cada um em suas respectivas formas: "[...] no pensamento empírico, que se nutre da lógica formal, encontram-se a abstração, generalização e conceito empíricos; no pensamento teórico, que se nutre da lógica dialética, estão a abstração, generalização e conceito teóricos" (FREITAS, 2016, p. 394). Dessa forma, como vimos, no pensamento empírico, as abstrações, generalizações e o conceito, se pautam nos traços externos e na classificação do objeto. Já no pensamento teórico, especificamente, envolve: a abstração, que se trata de um processo que inclui a descoberta das relações essenciais as quais caracterizam a essência e as propriedades de um objeto de estudo ou conteúdo; a generalização, que visa a formação de conceitos, o que significa obter um modo geral de pensar e de agir em relação a um conteúdo e, por fim, o conceito onde a sua formação é a culminância dos processos de abstração e generalização (LIBÂNEO, 2016).

O pensamento teórico, que está presente nos conceitos científicos, requer as ações mentais de abstração, generalização e conceito (pensamento teórico) (PERES; FREITAS, 2014). Assim, para o aluno se apropriar do conceito científico é necessário promover o desenvolvimento das ações mentais de abstração, generalização relacionados ao objeto de estudo de forma a se apropriar deste "[...] não apenas como resultado das investigações, mas como processo de pensamento utilizado nestas investigações para originar a criação do conteúdo (objeto) (PERES; FREITAS, 2014, p. 20). Diante disso, pergunta-se: de onde o professor deve começar o planejamento do ensino objetivando a reprodução da ações mentais que pesquisadores, cientistas e estudiosos se apropriaram como processo de pensamento para a criação do objeto? "Por onde começar tal reprodução? De acordo com a dialética é necessário começar pelo abstrato" (DAVYDOV, 1988, p. 143).

Ainda que os processos de abstração sejam inseparáveis dos de generalização e ambas formem uma unidade com o conceito, na organização do ensino e aprendizagem, as primeiras ações que o professor definirá para o aluno realizar no estudo do objeto envolvem os processos de abstração (FREITAS, 2016). Isso é afirmado por Davydov que, tendo a teoria marxista como base, menciona que "a reprodução teórica do concreto real como unidade do diverso se realiza pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto" (DAVYDOV, 1988, p. 142). O concreto é "[...] o conceito do objeto ou fenômeno reconstruído pelo pensamento" (PERES; FREITAS, 2014, p.22) e, para essa reconstrução, é preciso partir do abstrato, objetivando que o aluno busque o núcleo do objeto de estudo para, assim, chegar à sua forma concreta: "ao compreender o aspecto nuclear de um conteúdo ou objeto, o estudante começa a percorrer, pelo pensamento, seus traços abstratos para chegar ao objeto concreto" (PERES; FREITAS, 2014, p. 22).

Para chegar na forma nuclear do objeto, as ações que o professor definirá envolvem, primeiramente, os processos de abstração objetivando encontrar uma relação geral do objeto de estudo: "dado um determinado conteúdo, os alunos são orientados a captar uma relação geral, um princípio lógico que forma um 'núcleo conceitual' do objeto estudado, formando uma representação mental desse objeto" (LIBÂNEO, 2016, p.363). Dessa forma, por meio da análise do conteúdo, os alunos, com a ajuda do professor, vão buscando encontrar relações gerais básicas, o princípio geral que caracteriza o objeto (LIBÂNEO, 2016). Por exemplo, o professor, que objetiva ensinar a obtenção do volume de sólidos geométricos, pode pedir para os alunos comparem diversos sólidos geométricos buscando analisar e encontrar aspectos gerais comuns em relação a obtenção de seus volumes e assim mostrar que a relação *área da base e altura* é a relação geral principal do objeto de estudo sólidos geométricos (PERES, 2010).

A relação geral do objeto de estudo é representada, pelos alunos, formando um modelo que pode ser gráfico, desenhado ou escrito (FREITAS, 2016). Assim, após o encontro da relação geral principal do objeto de estudo, os alunos vão seguindo o caminho da abstração à generalização, verificando como essa relação geral se manifesta em outras relações particulares (LIBÂNEO, 2016). Dessa forma, “uma vez formada a abstração do objeto, deve ocorrer sua generalização” (PERES; FREITAS, 2014, p. 22), que é por meio desta que são aprofundadas as análises do objeto, em seu aspecto geral e essencial, para o seu aspecto particular, singular e concreto que podem ser vistos em situações contextualizadas (FREITAS, 2016). Assim, quando o aluno começa a utilizar a abstração e a generalização em situações particulares, ou seja, em outras abstrações de forma a deduzi-las e uni-las, o aluno converte

> [...] a formação mental inicial num conceito que registra o ‘núcleo’ do assunto estudado. Este ‘núcleo’ serve, posteriormente, as crianças como um princípio geral pelo qual elas podem se orientar em toda a diversidade do material curricular factual que têm que assimilar, em uma forma conceitual, por meio da ascensão do abstrato ao concreto (DAVYDOV, 1988, p. 167).

Portanto, para o desenvolvimento do pensamento teórico, Davydov defende o método de ascensão do abstrato ao concreto. Esse processo parte da identificação da relação geral do objeto de estudo, ou seja, a determinação de seu núcleo de forma que, posteriormente, este núcleo, que representa o conceito (pensamento teórico), oriente o aluno na solução de diversos problemas que exige o currículo escolar. Assim, nesse processo de ascensão do abstrato ao concreto, o professor estrutura e organiza o ensino partindo do princípio geral do objeto, de forma que consiga realizar abstrações e generalizações conceituais e assim seja capaz de utilizar de tais quesitos na solução de problemas da realidade que o evolva (LIBÂNEO; FREITAS, 2013). Assim, para que ocorra a ascensão do abstrato ao concreto, ou seja, para que o aluno possa pensar concretamente sobre o objeto, a atividade de estudo, segundo Davydov, deve ser planejada partindo do abstrato em direção ao concreto (DAVYDOV, 1988) que, para isso, deve possuir tarefas que consistem na “[...] investigação de problemas que contenham os conflitos fundamentais do fenômeno” (HEDEGAARD, 2013, p. 206).

2.2.2 Planejamento e organização da atividade de estudo

A atividade de estudo, formulada por Davydov, baseia-se na Teoria da Atividade proposta inicialmente por Vygotsky e Leontiev. Essa teoria possui duas premissas: toda atividade mental é uma representação dos objetos da realidade que constituem a cultura e, a atividade mental é o conjunto dos processos psicológicos superiores e se origina nas relações sociais do sujeito em seu contexto social e cultural (FREITAS; LIMONTA, 2012). Portanto, a Teoria da Atividade defende que a atividade mental do sujeito é uma representação da realidade do mundo que o cerca e essa atividade mental se origina nas interações sociais em uma determinada cultura que o sujeito está inserido.

Ancorada na primeira premissa da Teoria da Atividade, a atividade de estudo, proposta por Davydov, objetiva o desenvolvimento da atividade mental do sujeito, ou seja, o desenvolvimento do pensamento teórico sobre a realidade que o cerca. Para isso, Davydov defende que a apropriação das ações mentais (observação, descrição, comparação, formulação de hipóteses, classificação, definição, explicação, exemplificação, argumentação, solução e formulação de problemas) que pesquisadores e estudiosos desenvolveram, sobre um objeto da cultura, se dá por meio da atividade de estudo: "em sua atividade de estudo, as crianças reproduzem o processo real pelo qual os indivíduos vêm criando conceitos, imagens, valores e normas" (DAVYDOV, 1988, p. 166). Portanto, a função da atividade de estudo é "[...] propiciar a assimilação das formas de consciência social mais desenvolvidas – a ciência, a arte, a moralidade, a lei – cujas bases são os conhecimentos teóricos científicos" (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 355).

Para formar esse pensamento teórico nos alunos, "[...] é necessário que o professor organize a aula introduzindo tarefas que coloquem os alunos numa busca científica [...]" FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 79). Dessa forma, à luz da segunda premissa da Teoria da Atividade, o processo de apropriação do conteúdo inicia-se por meio de tarefas que introduzam um caminho que deverá ser percorrido pelos alunos onde estes deverão se apropriar das ações mentais sobre um objeto da cultura por meio de interações e comunicação compartilhada com o professor, colegas de turma e materiais didático-pedagógicos tais como livros, textos, filmes e ilustrações (FREITAS; ROSA, 2015). Portanto, "essas ações visam a recriação, para o aluno, de processos criativos realizados por outros. Assim, ele também tem a oportunidade de, embora não criando um novo conhecimento, percorrer o processo criativo que o originou" (FREITAS; ROSA, 2015, p. 621).

Para a apropriação do processo que originou o conceito, Davydov defende que este se dá por meio da ascensão do abstrato ao concreto. Dessa forma, é preciso que o professor, ao elaborar as tarefas que compõe a atividade de estudo, se atente ao princípio da conversão da atividade externa em atividade interna, ou seja, do social para o individual ou também do abstrato para o concreto: "[...] as ações mentais deverão ser inicialmente coletivas e, depois, individuais; as ações propostas pelo professor levarão os alunos a realizarem o movimento de pensamento na direção do geral (abstrato) para o particular (concreto)" (FREITAS; ROSA, 2015, p. 622).

Objetivando a ascensão do abstrato ao concreto, Libâneo (2009) aponta duas tarefas que precisam ser assumidas pelo professor no planejamento da atividade de estudo. A primeira tarefa é a *análise do conteúdo*, que requer do professor o encontro das relações gerais básicas relacionadas ao objeto de estudo, ou seja, que o professor formule um conceito nuclear que expressa o princípio interno do conteúdo que será estudado pelo aluno (LIBÂNEO, 2009). "O princípio interno é a relação geral estabelecida entre os vários elementos que constituem um objeto de estudo, captada no processo de desenvolvimento e constituição desse objeto na prática social e histórica do campo científico" (LIBÂNEO, 2016, p. 376-377). Portanto, esse processo requer que o professor organize o ensino de modo que os alunos vão em busca da relação geral do objeto de estudo onde essa busca coincida com a atividade científica na apreensão desse objeto (FREITAS, 2016).

Para isso, Libâneo (2016, p. 377) menciona que a "[...] aprendizagem deve ser baseada em problemas [...]". Isso porque, segundo Freitas (2016), o problema contribui para a direção que o professor que dar à atividade de estudo e, prossegue a autora dizendo que, este problema deve ser não uma mera questão que o aluno busca resolver, mas sim um problema de natureza teórica que deve aparecer para o aluno como um problema cognoscitivo. Portanto, a resolução de problemas tem o poder de direcionar a atividade de estudo, ou seja, de estruturar a atividade de modo que ocorram as abstrações e generalizações necessárias para a formação do pensamento teórico. Além disso, por fim, a atividade baseada na resolução de problema também tem o poder de aumentar o interesse e os motivos do aluno em conhecer o objeto de estudo (FREITAS, 2016), que é, segundo Libâneo (2009), a segunda tarefa que o professor precisa assumir no planejamento da atividade de estudo.

A segunda tarefa que precisa ser assumida pelo professor no planejamento da atividade de estudo, segundo Libâneo (2009), é a *consideração dos motivos dos alunos*. A consideração dos motivos do aluno para aprender sobre um objeto é baseada na Teoria da Atividade, que destaca também as necessidades, as ações, as operações (DAVYDOV, 1988) e o *desejo*, que foi acrescentado por Davydov à atividade de estudo (FREITAS, 2016). Isso significa que "a tarefa proposta pelo professor deve conter elementos que possam provocar no aluno a necessidade de estabelecer uma relação com o novo objeto a ser conhecido, seja por sua forma de desafio ou de problema a ser solucionado" (FREITAS; ROSA, 2015, p. 622).

Com relação à necessidade do aluno para aprender sobre um objeto, esta surge no decorrer do processo de aprendizagem. Assim, o aluno não inicia a sua vida escolar experimentando a necessidade de se apropriar do conhecimento teórico, entretanto, "esta necessidade surge no processo de assimilação real dos conhecimentos teóricos elementares durante a realização, junto com o professor, de ações de aprendizagem mais simples, dirigidas à solução das tarefas correspondentes" (DAVYDOV, 1988, p. 169-170).

A importância da consideração das necessidades é porque sem ela o aluno não entra em atividade de estudo (FREITAS, 2016). Dessa forma, para possibilitar essa necessidade, deve haver motivos para aprender sobre o objeto: "os alunos entram em atividade de estudo se eles de fato tiverem motivos (sociais/individuais) para aprender" (LIBÂNEO, 2016, p. 379). Assim, para motivar o aluno, Freitas (2016) destaca que a atividade de estudo precisa partir das experiências dos estudantes, onde o professor elabora problemas ligados ao cotidiano do aluno. Além disso, o professor pode possibilitar a exploração de conflitos cognitivos, levando os alunos a refletirem sobre a tarefa proposta e sobre a análise dos meios para realizá-la (FREITAS, 2016). Isso, segundo a autora, "[...] possibilita que os alunos percebam a necessidade de aprender o conceito e formem para si o objetivo de aprender, tornando-se conscientes de seus êxitos e falhas, estimulando sua autoconfiança em aprender etc" (FREITAS, 2016, p. 409).

Desenvolver situações de aprendizagem que envolvam o cotidiano do aluno e, além disso, relacionar conceitos acadêmicos com situações locais em que o aluno vive possibilitando-o a pensar e agir sobre determinado problema relacionado ao seu cotidiano e ao seu contexto local e social, pode contribuir para despertar o *desejo* em aprender (FREITAS, 2016). "[...] O *desejo* de aprender é um elemento psicológico, social e ao mesmo tempo individual, fazendo parte da estrutura psicológica da aprendizagem" (FREITAS; ROSA, 2015, p. 622, grifo nosso). Dessa forma, como o *desejo* de aprender é um elemento psicológico, individual e, além disso, social, significa que ele está ligado a motivação do aluno para realizar uma tarefa, isso, porque, a motivação, de certa forma, "[...] é o elo social (pois a tarefa foi elaborada pelo professor a partir de outras tantas ferramentas culturais), que cria na criança o *desejo* de participar daquela atividade, de responder às perguntas do professor, de dizer aos outros o que já sabe, enfim, de aprender" (FREITAS, LIMONTA, 2012, p. 82, grifo nosso).

Além da consideração das necessidades, motivos e desejos do aluno para aprender, é necessário que o professor se atente ao caráter investigativo da atividade de estudo, onde o aluno assume um papel ativo enquanto trabalha com o objeto. Para isso, por meio de uma atividade exploratória e criadora, o professor propõe ações para os alunos de forma "[...] que eles associem as conclusões obtidas por pesquisadores, isto é, os conhecimentos científicos, técnicos, artísticos, éticos etc., ao caminho investigativo percorrido por essas pessoas para chegar a essas conclusões” (FREITAS, 2016, p. 409-410). Dessa forma, ao fazer isso no planejamento da atividade de estudo, o professor deixa de lado uma proposta simplista de aula onde traz a pesquisa como ação de outro para, agora, propor algo onde o pensamento científico se torna vivo para o aluno por meio da criação de uma situação social de estudo (FREITAS, 2016).

Especificamente, de acordo com os pressupostos mencionados até aqui, Libâneo (2009) aponta os seguintes procedimentos que o professor precisa levar em consideração no momento da elaboração do plano de ensino:

1. Identificar as relações gerais básicas do objeto de estudo, indo de encontro ao núcleo conceitual, que contém a generalização esperada para que o aluno a interiorize e, posteriormente, a utilize de forma a deduzi-la em situações particulares;
2. Identificar as ações mentais presentes no objeto, no momento do estudo da gênese e dos processos investigativos do conteúdo, onde os alunos deverão se apropriar dessas ações mentais durante o estudo do objeto;
3. Construir uma rede de conceitos básicos que dão suporte ao núcleo conceitual do objeto, de forma que o aluno possa estabelecer relações e articulações entre esses conceitos básicos e o núcleo conceitual do objeto;
4. Elaborar tarefas, contendo situações-problema, de forma que o aluno assimile o modo de pensamento presente no conteúdo estudado e assim desenvolva capacidades e habilidades cognitivas gerais e especificas em relação ao objeto;
5. Prever formas de avaliação objetivando verificar se o aluno se apropriou ou está desenvolvendo a capacidade de se apropriar dos conceitos e utilizá-los como ferramentas mentais.

Além desses procedimentos que devem ser levados em consideração no momento de elaboração do plano de ensino, é necessário que o professor organize a atividade de estudo de forma que o aluno possa cumprir 5 (cinco) das 6 (seis) ações de aprendizagem que são descritas por Davydov (1988), sendo que a última é destinada ao professor:

1. Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo;
2. Modelação da relação geral do objeto de estudo;
3. Transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo a fim de estudar as suas propriedades em forma pura;
4. Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;

5. Controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente;
6. Avaliação da aprendizagem.

Com relação a primeira ação, os alunos devem descobrir a relação geral do objeto de estudo, sendo essa relação que reflete o conceito teórico e que serve como base genética e fonte das características e peculiaridades do objeto (PERES; FREITAS, 2014). Para isso, na primeira ação da tarefa, deverá ser apresentado ao aluno um problema, podendo ser em forma de pergunta ou um jogo que o aluno irá utilizar ou um problema envolvendo um caso (FREITAS, 2016). Dessa forma, "os alunos precisam reunir as informações e dados presentes no problema examiná-los [...] em busca da relação geral universal do objeto, destacando o núcleo dessa relação como base genética e fonte de todas as suas características e peculiaridades" (FREITAS, 2016, p. 412).

A ação de aprendizagem posterior consiste na criação de um modelo que representa a relação geral do objeto de estudo. Esse modelo pode ser "[...] expresso em forma literal, gráfica ou objetivada e que será utilizado posteriormente na análise do objeto" (PERES; FREITAS, 2014, p. 25). Para expressar um modelo da relação geral, o aluno deve ir em busca da gênese do objeto de forma que esse modelo estabeleça as "[...] características internas do objeto" (DAVYDOV, 1988, p. 174). Dessa forma, ir em busca das características internas do objeto significa conduzir o aluno em um processo histórico para a recriação de algo que representa a relação geral do objeto: "para eles consiste em criar algo para representar a relação, no entanto eles estarão reproduzindo algo que já foi historicamente criado pelos pesquisadores tratando-se, portanto, de uma recriação" (FREITAS, 2016, p. 412).

A terceira ação de aprendizagem possibilita o aluno estudar as propriedades da relação geral do objeto, não somente em seu aspecto abstrato (forma pura) mas, também, em seu aspecto concreto (particular). Isso consiste em introduzir alterações na relação geral do objeto a fim de alterar o seu núcleo e o seu resultado (FREITAS, 2016). Dessa forma, ao introduzir mudanças na relação geral do objeto, de forma que altere o núcleo dessa relação, poderá provocar uma alteração que descaracteriza o objeto de estudo, o que pode vir a causar consequências. Portanto, os alunos, ao compreenderem isso, reforçam a base genética do objeto e ainda "[...] identificam seu vínculo com relações particulares que interferem na forma pela qual se apresenta na realidade e compreendem que está sujeita a um processo de transformação" (FREITAS, 2016, p. 413).

Em seguida, a quarta ação de aprendizagem, segundo Davydov (1988, p. 175), "[...] permite que as crianças concretizem a tarefa de aprendizagem inicial e a convertam na diversidade de tarefas particulares que podem ser solucionadas por um procedimento único (geral), assimilado durante a execução das ações anteriores de aprendizagem". Assim, essas tarefas particulares são uma variação da tarefa inicial e que envolvem diversas situações reais e gerais onde os alunos irão identificar, nessas tarefas, a presença da relação geral do objeto (FREITAS, 2016). Portanto, segundo Davydov (1988), a validação dessa ação de aprendizagem é verificada na solução de tarefas particulares que, para isso, o aluno se orienta pela relação geral anteriormente assimilada.

A quinta ação de aprendizagem consiste em assegurar que o aluno conseguiu executar corretamente as operações que compõem a tarefa, por meio de um processo de reflexão sobre suas ações e sobre o caminho de seu pensamento, visando o cumprimento da assimilação da relação geral (PERES; FREITAS, 2014). Dessa forma, o monitoramento ou o controle das ações realizadas anteriormente "[...] consiste em um exame qualitativo substancial do resultado da aprendizagem em comparação com o objetivo do ensino e, nesse sentido, equivale à avaliação dos alunos por si próprios, tendo como referência o conteúdo de suas ações [...]" (FREITAS, 2016, p. 414-415).

A sexta e última ação de aprendizagem o professor avaliará, individualmente, a apropriação do conceito pelo aluno. Assim, no momento da avaliação, segundo Freitas (2016, p. 415), o professor pode se orientar por uma pergunta, sendo esta: "[...] o aluno se apropriou da relação geral abstrata e a utiliza na análise de relações particulares concretas do objeto?". Dessa forma, avaliar a aprendizagem, segundo Davydov (1988, p. 176), possibilita verificar se o aluno está assimilando, "[...] ou não, e em que medida, o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem correspondem, ou não, e em que medida, ao objetivo final".

Diante disso, essas seis ações de aprendizagem, que o aluno deve cumprir, segundo Davydov (1988), estão dirigidas para que possibilite a descoberta das condições de surgimento do conceito que os alunos estão assimilando e, ainda, segundo o autor, "é como se os próprios escolares construíssem o conceito, ainda que sob a direção sistemática do professor, (embora a natureza desta direção mude gradualmente e cresça, também gradualmente, o grau de autonomia exibido pelo escolar)" (DAVYDOV, 1988, p. 176).

Portanto, desenvolver o pensamento teórico do aluno requer, do professor, planejar tarefas de aprendizagem, onde este possa cumprir determinadas ações que visão o seu contato direto com o objeto de forma ativa e criadora buscando "[...] uma mudança no modo de agir do próprio sujeito, atuando no seu desenvolvimento" (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 357).

Diante disso, a seguir, abordaremos o experimento de ensino elaborado de acordo com a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, e aplicado em turma do 6º ano do ensino fundamental de um Colégio Estadual da região central de Goiânia.

3 PERCURSO METODOLOGICO

Este capítulo tem como objetivo a descrição do experimento de ensino que norteou o desenvolvimento da atividade de estudo em sala de aula, cuja finalidade é a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração, por alunos de uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de Goiânia.

Dessa forma, neste capítulo, primeiramente, será defendido o experimento de ensino como método de intervenção na perspectiva da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental e, posteriormente, descreveremos o plano de ensino que norteou o experimento de ensino.

3.1 O experimento de ensino: Aspectos teóricos e planejamento

Sendo o objetivo de nossa pesquisa identificar as contribuições de um experimento de ensino elaborado para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração, escolhemos o experimento de ensino como método de intervenção a fim de orientar o desenvolvimento da atividade de estudo em sala de aula.

Segundo Peres (2010),

> O experimento didático é uma intervenção pedagógico-didática visando interferir nas ações mentais dos alunos no processo de aprendizagem de um conteúdo específico [...]. O experimento didático consiste na experimentação teórica e metodológica do processo de ensino e aprendizagem no contexto da sala de aula (PERES, 2010, p. 23)

Assim, segundo Davydov (1988), o experimento de ensino visa a intervenção ativa do pesquisador nos processos psíquicos e pedagógicos, aos quais estuda. Essa intervenção não é uma verificação e constatação do estágio atual de desenvolvimento do pensamento do aluno, mas uma intervenção que visa a organização do ensino para o desenvolvimento de novas ações mentais:

> O método do experimento formativo tem como característica a intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda. Neste aspecto, difere substancialmente do experimento de verificação (constatação e comprovação) que somente enfoca o estado já formado e presente de uma formação mental particular. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo de novas formações mentais a serem constituídas, dos meios psicológicos e pedagógicos e das vias de sua formação (DAVYDOV, 1988, p. 188).

Especificamente, o experimento de ensino é uma aplicação da Teoria de Vygotsky sobre a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) e, devido esse fato, não é organizado de forma a se adaptar ao nível de desenvolvimento real dos alunos, mas sim como um método que impulsiona o desenvolvimento de novas ações mentais (AQUINO, 2015). Isso também é mencionado por Davydov (1988, p. 188):

> O ensino e a educação experimentais não são implementados por meio da adaptação a um nível existente, já formado de desenvolvimento mental das crianças, mas sim utilizando, por meio da comunicação do professor com as crianças, procedimentos que formam ativamente nelas o novo nível de desenvolvimento das capacidades (DAVYDOV, 1988, p. 188).

Nesse sentido, a escolha do experimento de ensino como método de intervenção se deve ao fato de contribuir para a formação do pensamento teórico, atuando na zona de desenvolvimento proximal, podendo desenvolver novas ações mentais nos alunos com relação ao conceito de adição de fração.

Para possibilitar o desenvolvimento de novas ações mentais, segundo Aquino (2015), o experimento de ensino deve ser dividido em quatro etapas, sendo elas: a revisão da literatura e o diagnóstico da realidade que será estudada; a elaboração do sistema didático experimental; desenvolvimento do experimento de ensino e, por fim, a análise dos dados.

A primeira etapa do experimento de ensino, Aquino (2015) menciona que deve ser elaborado um aporte teórico, dentro da Teoria Histórico-cultural, que servirá de base para a análise do fenômeno, e aponta que deve ser realizada uma revisão de literatura a fim de justificar a pesquisa. Além disso, o outro ponto que o autor aborda nesta etapa é a caracterização da turma com a qual se realizará o experimento, onde, o propósito, é ter um diagnóstico inicial dos participantes.

De acordo com a primeira etapa do experimento de ensino, foram realizadas as seguintes ações:

- Buscamos ultrapassar as barreiras do pensamento empírico para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração, de acordo com a Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental, nos ancorando, principalmente, em Vygotsky (2009), Rego (1995), Oliveira (1997), Davydov (1988), Freitas (2016), Freitas e Rosa (2015), Freitas e Limonta (2012), Libâneo (2009), Libâneo (2016), Libâneo e Freitas (2013);

- Foi realizada uma revisão bibliográfica no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, sobre a Teoria do Ensino Desenvolvimental, constatando que não há neste repositório, até o momento da revisão, dissertações ou teses que abordam o conceito de adição de fração como objeto de estudo na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental. Isso pode apontar a falta de pesquisas sobre a temática em questão tendo como viés a Teoria de Davydov;
- Para o diagnóstico inicial dos participantes, foi entregue um questionário misto (Apêndice C), a cada aluno, a fim de verificar a faixa etária e a composição por sexo. Além disso, com o mesmo questionário foi realizada uma análise do ensino de matemática pela visão dos alunos e um diagnóstico da aprendizagem do conceito de adição de fração e de outros conceitos que o envolve, como, o conceito de fração, comparação de fração, representação de fração e a equivalência entre frações, tendo como objetivo criar subsídios para a atuação da pesquisadora na zona de desenvolvimento proximal do aluno, contribuindo para a formação de novas ações mentais.

A segunda etapa do experimento de ensino, segundo Aquino (2015), consiste na elaboração do sistema didático experimental. Nesse sentido, segundo o autor, o pesquisador deverá elaborar um plano de ensino que objetiva a identificação dos aspectos gerais-essenciais dos conceitos a serem ensinados. Além disso, o plano de ensino deverá conter os objetivos, os conteúdos, os métodos e os recursos que serão necessários para possibilitar a aprendizagem.

Assim, de acordo com a segunda etapa do experimento de ensino, foi elaborado um plano de ensino (Apêndice B) que visa a apropriação da essência do conceito de adição de fração, por meio do método da ascensão do abstrato ao concreto, que consiste em identificar o aspecto geral e essencial do objeto e aplicá-lo em situações particulares, como descrito por Davydov (1988).

Para isso, os alunos devem cumprir as 5 (cinco) das 6 (seis) ações de aprendizagem que são descritas por Davydov (1988), sendo que a última é destinada ao professor. Nesse sentido, para cada uma das 5 (cinco) ações devem ser planejadas tarefas de aprendizagem que objetivam a formação do pensamento teórico sobre o objeto. Sendo assim, no caso do nosso objeto de estudo, o aluno deve identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, por meio da realização de tarefas de aprendizagem e, posteriormente, aplicar essa relação em situações particulares.

Dessa forma, foram elaboradas tarefas de aprendizagem (Apêndice A) de acordo com as 5 (cinco) ações elencadas por Davydov (1988), para que os alunos identifiquem a relação geral do conceito de fração com denominadores diferentes, e possa aplicá-la em situações particulares, o que indicaria a formação do pensamento teórico (FREITAS, 2016).

Nesse sentido, a relação geral, que explica o conceito do nosso objeto, é o estabelecimento de frações equivalentes para, assim, realizar a operação de adição entre duas ou mais frações quando estas não possuem o mesmo denominador. Assim, identificar essa relação geral e aplicá-la em situações particulares (contextualizadas), indica a formação do pensamento teórico, ou seja, que o experimento de ensino possibilitou a ascensão do abstrato ao concreto, descrito por Davydov (1988).

Visando a formação do pensamento teórico, nos ancoramos em Libâneo (2009) para organização do plano de ensino onde traz procedimentos que o professor precisa levar em consideração, tais como: a identificação das relações gerais básicas do objeto de estudo; a identificação das ações mentais presentes no objeto; a construção de uma rede de conceitos básicos que dão suporte ao núcleo conceitual do objeto; a elaboração de situações-problema que desenvolvam as capacidades e habilidades cognitivas gerais e especificas em relação ao objeto e, por fim, prever formas de avaliação objetivando verificar se o aluno se apropriou do conhecimento.

A terceira etapa do experimento de ensino, segundo Aquino (2015), consiste na aplicação do sistema didático experimental elaborado na etapa anterior. Dessa forma, devem ser escolhidos instrumentos de coleta de dados da pesquisa, sendo defendida pelo autor a observação direta. Além disso, o autor menciona que se deve traçar uma estratégia de análise desses dados por meio de categorias que são criadas comparando o quadro conceitual da pesquisa com os aspectos relevantes observados nos dados.

De acordo com a terceira etapa do experimento de ensino, foram realizadas as seguintes ações:

- O experimento de ensino foi aplicado em um Colégio Estadual da região central de Goiânia, para uma turma do 6º ano do ensino fundamental, composta por 33 (trinta e três) alunos. **Foram 13 (treze) encontros/aulas de 50 (cinquenta) minutos cada, entre os meses de novembro e dezembro de 2019;**
- Como instrumentos de coleta de dados, utilizamos um roteiro de observação (Apêndice D), que foi elaborado de acordo com Peres (2010, p. 130). Este roteiro constitui-se na observação direta da pesquisadora no contexto da sala de aula e nas ações de aprendizagem dos alunos. Assim, por exemplo, serão observadas as falas, as atitudes, a interação, a forma de resolução das tarefas de aprendizagem propostas, dentre outras, sendo registradas por meio de diário de campo. Outros instrumentos de coleta de dados

são: o questionário misto, aplicado inicialmente (Apêndice C), para se ter o diagnóstico dos participantes, e por fim, as tarefas de aprendizagem que compõem o experimento de ensino (Apêndice A).

Como forma de organização dos dados foram estabelecidas as seguintes categorias de análise: formação de conceitos (pensamento teórico/pensamento empírico), zona de desenvolvimento proximal, comunicação compartilhada/interação, mediação e atividade de estudo. Assim, os dados da pesquisa foram analisados de acordo as particularidades dessas categorias na perspectiva da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental, onde objetivamos responder: Que contribuições um experimento de ensino formativo sobre o conceito de adição de fração à luz da Teoria do Ensino Desenvolvimental pode trazer para a formação do pensamento teórico dos estudantes?

Por fim, **a quarta etapa** do experimento de ensino, segundo Aquino (2015), consiste na análise das categorias estabelecidas anteriormente. Para isso realizamos uma análise qualitativa dessas categorias, buscando explicar os fenômenos que aparecem nas falas dos alunos, no comportamento dos sujeito da pesquisa, no registro das condições em que se realiza o processo de aprendizagem e na resolução das tarefas.

Portanto, com a Teoria do Ensino Desenvolvimental buscamos ultrapassar as barreiras do pensamento empírico para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração por meio do procedimento ascensão do abstrato ao concreto, descrito por Davydov (1988). Para isso, foi elaboramos um plano de ensino de acordo com Libâneo (2009) que visa orientar o experimento de ensino, de forma que os alunos possam cumprir as 5 (cinco) das 6 (seis) ações estabelecidas por Davydov (1988), para assim respondermos a nossa questão investigativa.

3.2 O plano de ensino

Elaborou-se um plano de ensino (Apêndice B) que visa nortear o experimento de ensino para a apropriação do conceito de adição de fração. Dessa forma, procurou-se elaborar o plano de ensino de acordo com Libâneo (2009), que traz os 5 (cinco) procedimentos que o professor precisa considerar no momento da organização do ensino, como já mencionamos anteriormente: Identificar as relações gerais básicas do objeto de estudo; Identificar as ações mentais presentes no objeto; construção de uma rede básicas de conceitos que dão suporte ao núcleo do objeto; elaboração de tarefas, pelo professor, para que o aluno desenvolva as suas capacidades cognitivas em relação ao objeto e, por fim, prever formas de avaliação.

Portanto, a seguir, faremos uma explicação do plano de ensino, trazendo as tarefas de aprendizagem planejadas para cada uma das 5 (cinco) ações de aprendizagem, segundo Davydov (1988). Quanto a ação 6 (seis), será mencionada a forma com a qual será avaliada a aprendizagem dos alunos.

3.2.1 Ação 1: Identificação da relação geral do objeto de estudo

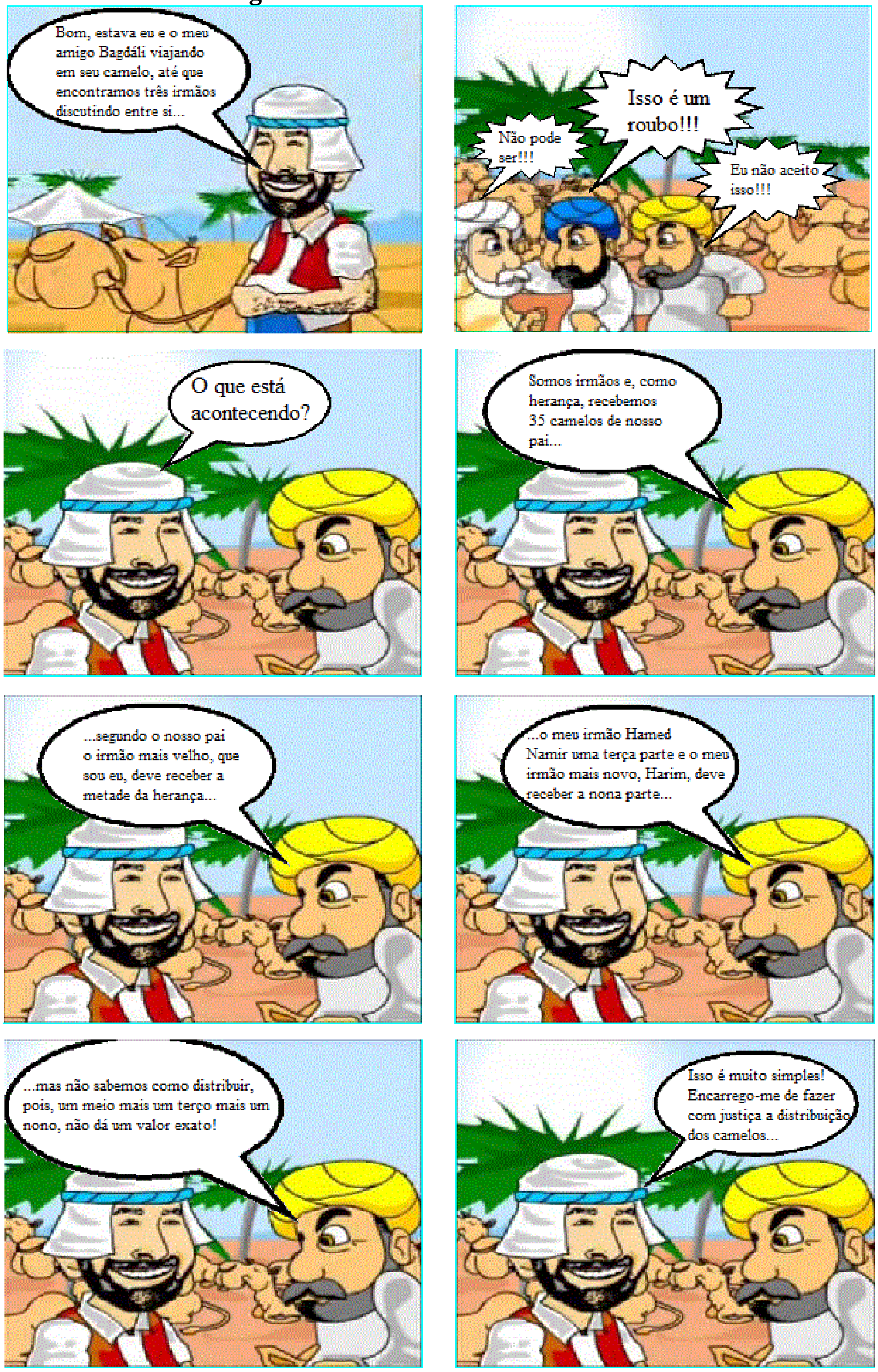
Segundo Peres e Freitas (2014), a primeira ação de aprendizagem consiste na identificação da relação geral do objeto de estudo. Para isso, segundo Freitas (2016) um problema deve ser proposto aos alunos a fim de que reúnam as informações contidas neste problema e, posteriormente, as analisem e identifiquem a relação geral que caracteriza o núcleo objeto.

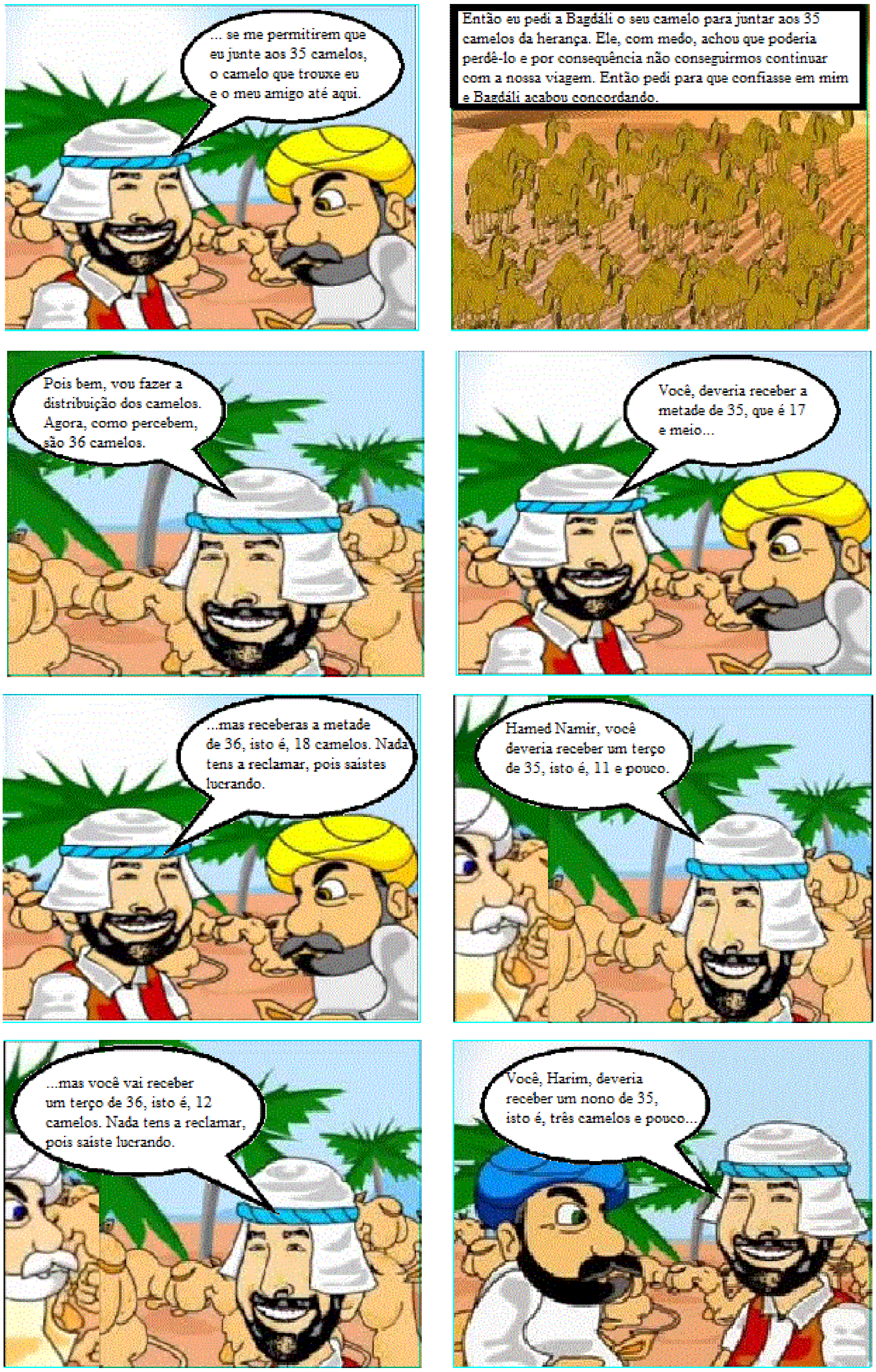
Diante disso, os alunos deverão ler uma história em quadrinho, elaborada pela pesquisadora, baseada no “Problema dos Camelos”, do livro “O homem que calculava” do autor Malba Tahan (2002). Dessa forma, a inserção do “Problema dos Camelos”, no ensino, consiste em um meio pelo o qual os alunos possam encontrar a relação geral do objeto de estudo, aumentando o seus interesses, os seus motivos, e o seus desejos para entrarem em atividade de estudo, tal como menciona Freitas (2016).

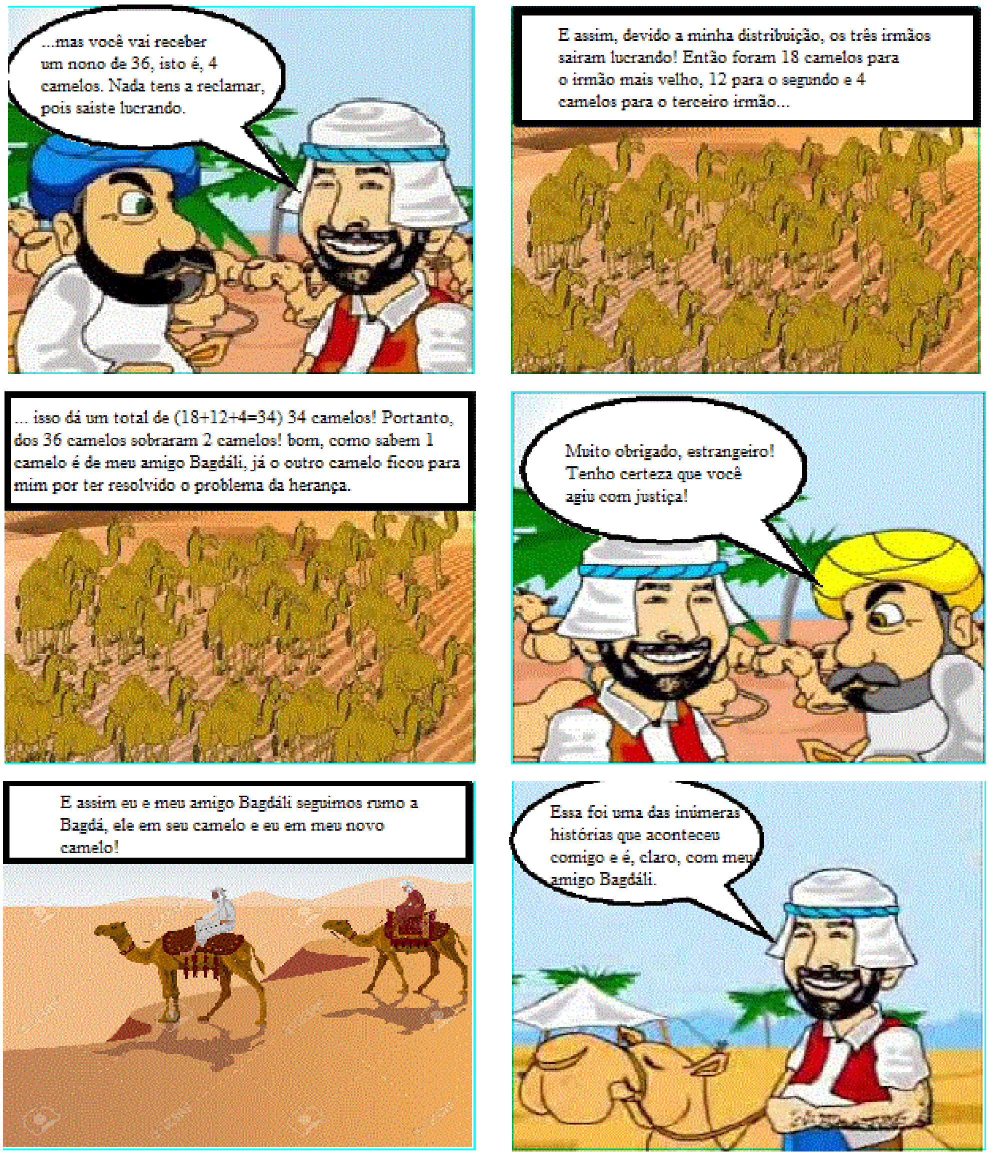
A escolha das histórias em quadrinhos como um recurso para trazer o problema, justifica-se, porque “[...] elas aumentam a motivação dos estudantes, pois, em geral, eles as recebem de forma entusiasmada, provocando-os a uma participação mais ativa nas aulas, facilitando o entendimento dos conteúdos abordados, aguçando a curiosidade e desafiando o senso crítico” (BALLADARES, 2014, p. 13).

Nesse sentido, elaborou-se uma a história em quadrinho, tal como mostra a figura 1, com imagens disponíveis na internet (Anexo A), por meio do *software* “HagáQuê”. Esse so*ftware* foi desenvolvido pela Unicamp (Universidade de Campinas), e o motivo de sua escolha se deve ao fácil manuseio e, além disso, por ser gratuito, podendo ser baixado pelo o seguinte link: https://www.nied.unicamp.br/projeto/hagaque/

Figura 1 - "O Problema dos Camelos"




... se me permitirem que eu junte aos 35 camelos, o camelo que trouxe eu e o meu amigo até aqui.
Então eu pedi a Bagdáli o seu camelo para juntar aos 35 camelos da herança. Ele, com medo, achou que poderia perdê-lo e por consequência não conseguirmos continuar com a nossa viagem. Então pedi para que confiasse em mim e Bagdáli acabou concordando.
Pois bem, vou fazer a distribuição dos camelos. Agora, como percebem, são 36 camelos.
Você, deveria receber a metade de 35, que é 17 e meio...
...mas receberas a metade de 36, isto é, 18 camelos. Nada tens a reclamar, pois saístes lucrando.
Hamed Namir, você deveria receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco.
...mas você vai receber um terço de 36, isto é, 12 camelos. Nada tens a reclamar, pois saiste lucrando.
Você, Harim, deveria receber um nono de 35, isto é, três camelos e pouco...



Fonte: elaborado pela autora.

Em resumo, o “Problema dos Camelos” conta a história de Beremiz Samir e de seu amigo Bagdáli, que viajavam juntos para Bagdá. No meio do caminho os dois amigos encontraram três irmãos que estavam discutindo entre si em relação a partilha da herança que o pai havia deixado para eles. A herança são 35 (trinta e cinco) camelos que deveriam ser divididos entre os irmãos da seguinte maneira: o irmão mais velho deveria receber a metade da herança; o irmão do meio deveria receber a terça parte da herança e, por fim, o irmão mais novo deveria receber a nona parte da herança. Entretanto, essa partilha não daria um número exato de camelos aos três irmãos.

Assim, Beremiz Samir se ofereceu para ajudar os três irmãos, juntando o camelo de seu amigo Bagdáli aos camelos da herança. Dessa forma, agora, com um total de 36 (trinta e seis) camelos, os três irmãos saíram lucrando, sendo que o irmão mais velho recebeu 18 (dezoito) camelos, o irmão do meio recebeu 12 (doze) camelos e, por fim, o irmão mais novo recebeu 4 (quatro) camelos. Além disso, Beremiz Samir, também saiu lucrando, conseguindo de volta o camelo de seu amigo Bagdáli e um camelo para si.

Diante dessa história, pergunta-se:

- **Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?**

O conhecimento matemático que Beremiz Samir utilizou foi a adição de fração com denominadores diferentes. Isso pode ser constatado, especificamente, no sétimo quadrinho da história (Apêndice A), onde o irmão mais velho diz: “[...] um meio mais um terço mais um nono não dá um valor exato”. Sendo assim, Beremiz Samir percebeu que, ao somar as frações da herança, o resultado não equivale a um inteiro, ou seja, haveria uma “sobra”. Por isso forneceu o camelo de seu amigo, recebendo-o de volta, e ganhou um camelo para si.

- **Como somar as frações da herança?**

Como o conhecimento matemático adição de fração com denominadores diferentes foi reconhecido na questão anterior, a forma como as frações da herança foi somada, diz respeito a relação geral principal que os alunos devem identificar, que é por meio do estabelecimento de frações equivalentes. Dessa forma, os estudantes precisam compreender que não se deve somar os denominadores das frações, mas igualá-los a um mesmo denominador para, assim, posteriormente, realizar a operação de adição. É evidente que o objetivo do “Problema dos Camelos” não é explicar como se realiza a adição de fração com denominadores diferentes, entretanto, vimos nesse problema uma possibilidade motivadora para a formação do conceito dessa operação, além de solucionar o próprio problema.

Diante disso, o objetivo da primeira ação de aprendizagem descrita por Davydov (1988), consiste na transformação dos dados da tarefa objetivando a identificação da relação geral do objeto de estudo. Sendo assim, a relação geral que os alunos devem identificar por meio do problema é que, para realizar a adição de fração com denominadores diferentes, devem ser estabelecidas frações equivalentes, sendo esta a relação geral que expressa o núcleo do objeto.

Para identificar a relação geral do objeto, serão propostas tarefas de aprendizagem. A primeira tarefa consiste na leitura da história em quadrinho, identificando o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, por meio da análise da história e diálogo entre os grupos e a pesquisadora.

Após a identificação do objeto, outra tarefa de aprendizagem será proposta. Nessa tarefa, os alunos devem analisar como somar as frações da herança obtendo o número não exato, e registrar essas informações em uma folha para, depois, serem discutidas entre a turma e a pesquisadora. Assim, este momento tem como objetivo verificar o que os alunos compreendem sobre adição de fração com denominadores diferentes. Portanto, esta é a ***tarefa 1/primeira aula***.

***

A ***tarefa 2/segunda aula***, consiste em "deixar de lado", momentaneamente, o "Problema dos Camelos", indo em busca de conhecimento para, posteriormente, voltar ao problema e identificar a relação geral do objeto.

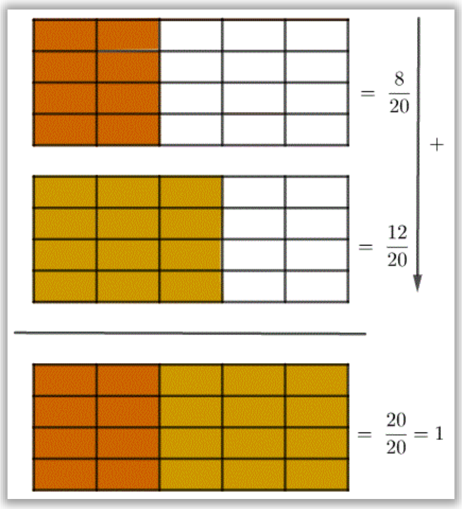
Assim, nesta aula, será perguntado aos alunos se eles conseguem relacionar as frações com alguma situação do cotidiano. Após essa conversa a pesquisadora lançará a seguinte questão:

- **Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?**

Para isso, uma barra de chocolate contendo vinte retângulos que a forma, será dada aos alunos. Assim, os estudantes poderão retirar, primeiramente, oito vinte avos da barra de chocolate e, em seguida, mais doze vinte avos. Com isso será possível perceber que todos os retângulos foram retirados, logo a resposta é que a barra de chocolate foi comida por inteiro.

Uma representação numérica e geométrica dessa situação pode ser vista na figura 2:

Figura 2 – Representação numérica e geométrica para o problema da barra de chocolate



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Terminada as análises, os grupos deverão apresentar os seus resultados para a turma. Assim, por meio de uma discussão, os alunos devem compreender como é a representação numérica e geométrica de uma adição de fração, o que é um inteiro e, por fim, o que significa o conceito de adição de fração com denominador igual, desencadeado pela pergunta:

- **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?**

Portanto, o objetivo é que os alunos possam compreender, por meio da manipulação do material (barra de chocolate) e da troca e experiências uns com os outros, como se dá a representação geométrica e numérica de fração, o significado do conceito da adição de fração com denominadores iguais e, também, a noção do inteiro.

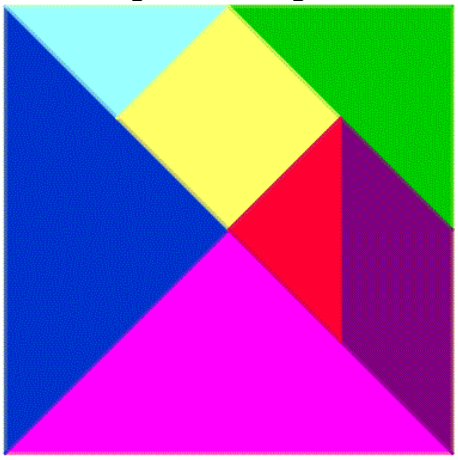
***

A ***tarefa 3/terceira aula*** consiste em construir um Tangram para que os alunos possam aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações de aprendizagem que o envolva, e generalizar esse conhecimento para a operação de subtração. Além disso, com o Tangram, visamos introduzir o conceito de frações equivalentes.

O Tangram, é um quebra-cabeça chinês, que possui sete peças. São cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. Estas peças são originadas da decomposição de um quadrado.

A figura 3, ilustra o Tangram:

Figura 3 – Tangram



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Segundo Santos (2019), o Tangram pode ser utilizado nas aulas de matemática para atingir diversos objetivos, como, por exemplo introduzir o conceito de operações com frações. Além disso,

> [...] o Tangram como auxílio didático em sala de aula, propícia um aumento de interesse, motivação e aprendizado por parte dos alunos, tornando as aulas mais dinâmica e produtiva, contando com maior participação dos educandos na explicação e discussão do conteúdo, facilitando a compreensão da ideia de

> fração e de sua simbologia, além de favorecer a interação entre eles, tornando-os sujeitos ativos no processo de aprendizagem (SANTOS, 2019, p. 83).

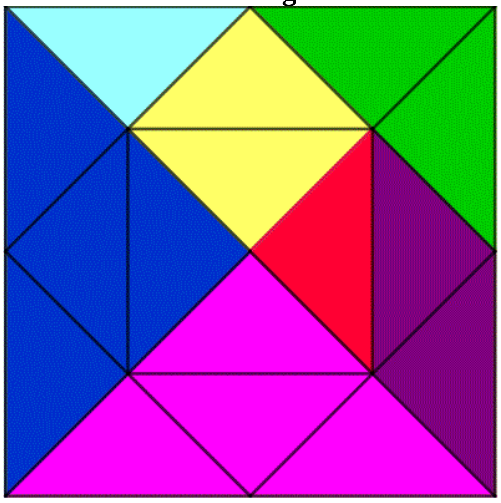
Para iniciar a aula, os alunos devem ler uma história em quadrinho sobre o Tangram (Apêndice A). Após, uma folha de papel A4 deve ser entregue a cada aluno para possam construí-lo. A construção do Tangram pode ser vista no apêndice A.

Após a construção, os alunos deverão reconhecer as figuras geométricas, que compõe o Tangram, e com elas formar um quadrado. Posteriormente devem analisar as seguintes questões norteadoras:

- **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?**

Para respondermos a essa questão analisemos a figura 4, que mostra o Tangram, que pode ser subdivido em 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno.

Figura 4 – Tangram subdividido em 16 triângulos semelhantes ao triângulo pequeno



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Primeiramente, os alunos precisam analisar o quadrado e concluir que este é formado por 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno. Em seguida, é fácil verificar que a fração que representa o paralelogramo é $\frac{2}{16}$, pois cada triângulo que se formou equivale a $\frac{1}{16}$ do quadrado. Logo, a fração que representa o paralelogramo é igual a $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}$.

O mesmo processo equivale para determinar a fração do inteiro que representa o quadrado, os dois triângulos pequenos e o triângulo médio.

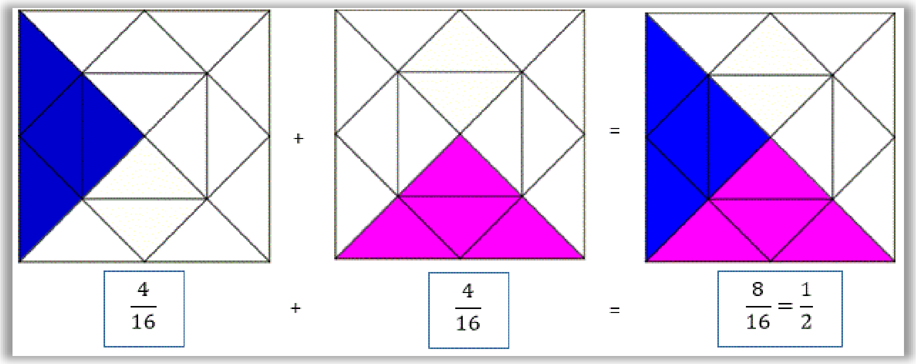
- **Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram? O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?**

O Tangram pode ser representado pela fração $\frac{16}{16}$. Como o quadrado equivale a $\frac{2}{16}$ do Tangram, e o triângulo pequeno equivale a $\frac{1}{16}$, logo temos que os dois juntos equivale a $\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$. Diante disso, ao retirarmos do Tangram um dos triângulos pequenos mais o quadrado, temos a seguinte subtração: $\frac{16}{16}-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$. Portanto, os alunos devem concluir que, fração com denominadores iguais, o denominador não muda, assim como na adição de fração com denominadores iguais, pois os valores que estão sendo retirados do Tangram partem de um mesmo valor inteiro.

- **Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos? Escreva uma adição que representa essa situação, e a represente geometricamente.**

A figura 5, mostra uma adição que representa essa situação e sua representação geométrica:

Figura 5 – Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos?



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Analisando a figura 5, cada triângulo grande equivale a $\frac{4}{16}$ do Tangram. Logo, temos que $\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{8}{16}$. Portanto, a fração que representa os dois triângulos juntos é igual a $\frac{8}{16}$.

Posteriormente, os alunos deverão apresentar os seus resultados para toda a turma. Em seguida, será perguntando:

- **O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?**

O objetivo é que os estudantes percebam, por meio da representação geométrica e do Tangram, que a fração $\frac{8}{16}$ é a metade do quadrado, logo esta fração é equivalente a fração $\frac{1}{2}$.

***

A ***tarefa 4/quarta aula,*** consiste em voltar ao problema dos camelos para identificar a relação geral do objeto adição de fração com denominadores diferentes, que é a equivalência de frações.

Especificamente, será pedido aos alunos que escrevam uma adição para as frações do problema, que são elas: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$.

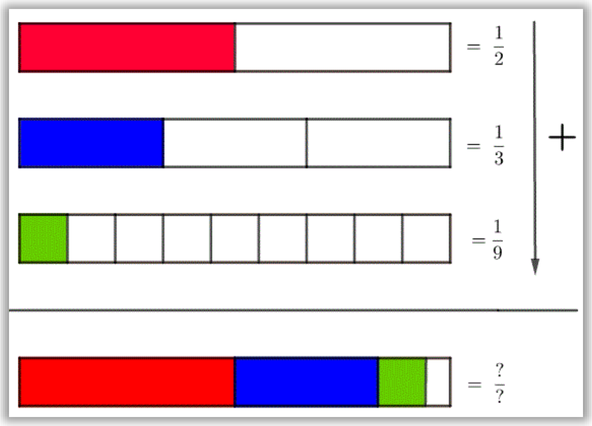
Uma vez que a soma de frações com denominadores iguais já é conhecida tanto numericamente quanto geometricamente, basta que os alunos façam uma analogia das aulas anteriores, tendo em vista realizar o mesmo processo, agora, para as frações com denominadores diferentes.

Portanto, será lançada a seguinte questão:

- **Nas aulas anteriores, representamos geometricamente e numericamente a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las.**

Com isso, por meio de um processo de análise e reflexão entre a pesquisadora e os alunos, estes deverão perceber que, para se realizar a adição de fração com denominadores diferentes, é preciso obter um denominador comum. Geometricamente, temos a seguinte explicação:

Figura 6 – Solução geométrica que represente a adição das frações da herança



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

De acordo com a figura 6, temos que, o primeiro retângulo, está divido em duas partes iguais, onde uma parte foi pintada. A parte pintada representa $\frac{1}{2}$ do total. Em seguida, o segundo retângulo está dividido em três partes iguais, onde, uma parte foi pintada. A parte pintada representa $\frac{1}{3}$ do total. Por fim, o terceiro retângulo, está dividido em nove partes iguais, onde, assim como nos casos anteriores, uma parte foi pinta. A parte pintada representa $\frac{1}{9}$ do total. Diante disso, verifica-se que não é possível "encaixar" com total perfeição as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ no quarto retângulo.

Diferentemente desse caso, nas aulas anteriores sobre adição de fração com denominadores iguais, as frações representavam um mesmo valor inteiro. Agora, como realizar a operação de adição de fração quando o denominador não é o mesmo? Para responder a essa pergunta os alunos devem, juntamente com a pesquisadora, por meio de uma análise e reflexão dos conhecimentos apropriados nas aulas anteriores, perceber que é necessário recorrer a equivalência entre frações, que é a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.

Para que os alunos identifiquem a relação geral, será recordada a aula sobre a barra de chocolate, de forma que percebam que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ não representam o mesmo inteiro, diferentemente de quando as frações possuem o mesmo denominador. Posteriormente, será relembrada a aula sobre o Tangram, perguntado, novamente, o que significa a fração$\frac{8}{16}$ e $\frac{1}{2}$.

Diante disso, por meio de um diálogo e reflexão, deverão perceber que equivalem a metade do quadrado, ou seja, correspondem a uma mesma quantidade. Assim, utilizaremos desse exemplo para as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ e, como os alunos sabem que estas não representam um mesmo valor, logo perceberão que é necessário recorrer a equivalência de frações, de forma que possam "igualá-las" a um mesmo inteiro para, assim, realizar a operação de adição para quando os denominadores forem diferentes.

O quadro 2, a seguir, traz os objetivos específicos e as tarefas de aprendizagem que serão propostas nesta primeira ação do experimento de ensino, que consiste na transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo.

Quadro 2 – Síntese das aulas que compõem a primeira ação de aprendizagem

Ação 1	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	**TAREFAS DE APRENDIZAGEM**
Primeira aula	• Despertar o interesse do aluno para o estudo do objeto por meio da leitura da história em quadrinho sobre o "Problema dos Camelos"; • Identificar o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes; • Indicar uma forma de somar frações com denominadores	• Identificação do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, por meio da análise da história em quadrinho e diálogo entre os grupos e a pesquisadora. • Realização de uma análise, em grupo, de como somar as frações da herança e registrar essas informações na atividade

	diferentes.	impressa.
Segunda aula	• Compreender que as frações fazem parte do dia a dia; • Representar numericamente e geometricamente a adição de fração com denominadores iguais; • Representar numericamente e geometricamente a noção do inteiro; • Compreender, que não se deve somar os denominadores das frações; • Compreender o significado conceito de adição de fração com denominadores iguais.	• Identificação das frações no cotidiano por meio de um diálogo entre a turma e a pesquisadora. • Discussão, em grupo, para escrever uma adição, tanto numericamente quanto geometricamente, que responda qual é a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida no total. • Apresentação dos resultados e discussão sobre: como representar numericamente e geometricamente a adição de fração; o que é um inteiro e, por fim, o significado do conceito de adição de fração com denominador igual, desencadeado pela pergunta: Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?
Terceira aula	• Identificar a nomenclatura de formas geométricas por meio do Tangram; • Aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações de aprendizagem que envolva o Tangram; • Generalizar o conceito de adição de fração com denominadores iguais para a operação de subtração; • Compreender, com o Tangram, o conceito de frações equivalentes.	• Leitura, em grupo, da história em quadrinho sobre o Tangram. • Construção, em grupo, de um Tangram com uma folha de papel A4. • Discussão em grupo, e com a pesquisadora, para reconhecer a nomenclatura de cada figura geométrica que compõe o Tangram, e com elas formar um quadrado. • Discussão em grupo sobre as questões norteadoras. • Apresentação dos resultados e discussão sobre fração equivalente desencadeado pela pergunta: O que significa no Tangram a fração oito dezesseis avos?
Quarta aula	• Identificar a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, analisando, novamente, o problema dos camelos por meio da representação geométrica de fração em papel milimetrado;	• Analisar e refletir, em grupo, objetivando escrever uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las. • Apresentação dos resultados e

	• Identificar a relação de frações equivalentes como meio de realizar a operação de adição entre frações que não possuem o mesmo denominador.	reflexão dos conhecimentos apropriados nas aulas anteriores e nesta aula, perceber que é necessário recorrer a equivalência entre frações, que é a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.

Fonte: elaborado pela autora.

3.2.2 Ação 2: Modelação da relação geral do objeto de estudo

Esta ação consiste na criação de um modelo que representa a relação geral do objeto de estudo (DAVYDOV, 1988). Para isso, por meio de um processo histórico, o aluno deve ir em busca das características internas do objeto para recriar um modelo, de forma gráfica, literal ou objetivada, que representa a sua relação geral (FREITAS, 2016).

Como na ação anterior os alunos identificaram que a relação geral, que caracteriza o núcleo do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, é a equivalência de fração, agora, estes devem ir em busca da sua modelação, ou seja, determinar um modelo de como obter frações equivalentes para realizar a operação de adição quando os denominadores não forem iguais.

Especificamente, os estudantes devem compreender, historicamente, porque é necessário submeter-se a um denominador comum, ou seja, por que determinar frações equivalentes. A partir disso, precisam elaborar um modelo que expressa a relação geral do objeto.

Para isso, a ***tarefa 5/primeira aula*** desta segunda ação consiste na leitura de uma história em quadrinho sobre a história do conceito de fração (Apêndice A). Dessa forma, tarefas de aprendizagem serão propostas para que os alunos reconstruam o acontecimento histórico, que revela o surgimento das frações, à medida que forem lendo a história em quadrinho.

Nesse sentido, a história em quadrinho foi dividida em 3 (quatro) partes, que serão esplanadas a seguir:

Parte 1

Na primeira parte da história em quadrinho, a pesquisadora convidará os alunos a embarcarem em uma grande aventura, juntamente com Beremiz Samir, a fim de descobrir como as frações surgiram para, depois, encontrar uma forma de obter frações equivalentes.

Assim, a história inicia no antigo Egito, com um sério problema: Os agricultores plantavam alimentos às margens do Rio Nilo, que fertilizavam as terras, e quando vinha a cheia as marcas que separavam as terras dos agricultores eram desfeitas. Sendo assim, o faraó precisou mandar medir novamente as terras, mas como ele fará isso?

Portanto, os alunos devem **indicar algum instrumento de medida, que existe atualmente, que pode ser utilizado para medir as terras às margens do rio Nilo**. Sendo assim, podem mencionar instrumentos de medida, tais como: Régua, fita métrica, trena, dentre outros.

O objetivo desta primeira tarefa de aprendizagem é a identificação de instrumentos de medida utilizados atualmente para que, na próxima ação, quando mencionar que os egípcios faziam uso de cordas com nós igualmente espaçados, percebam que os objetos existentes passaram por um processo de transformação, ou evolução no decorrer da história e que isso continua acontecendo.

A figura 7 a seguir, mostra onde os alunos devem escrever, na atividade impressa, os instrumentos de medida que existem hoje. Após, as respostas deverão ser discutidas entre os grupos.

Figura 7 – Indicação de instrumentos de medida

Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora

Parte 2

A segunda parte da história em quadrinho, diz que o instrumento de medida utilizado pelos egípcios eram cordas com nós igualmente espaçados, onde a distância de um nó ao outro era igual a 1 (um) cúbito. Assim, a história continua dizendo que o cúbito era a unidade de medida da época e, que este, era a distância do cotovelo até o dedo médio do faraó.

Dessa forma, será pedido a cada grupo que elejam um faraó para tomar a sua medida. Cada grupo, portanto, terá o seu faraó. Assim, será disponibilizado um rolo de barbante para que os integrantes de cada grupo tomem a medida que vai do cotovelo até o dedo médio do faraó escolhido. Os critérios para a indicação ficarão a escolha dos alunos.

Tendo o barbante como instrumento de medida, os alunos deverão medir a sala de aula, ou seja, a frente, o fundo e os outros dois lados da sala, escrevendo os resultados na atividade impressa. Sendo assim, serão orientados para escreverem, por exemplo: “A frente da sala possui 15 (quinze) cúbitos” ou, quando o cúbito não for suficiente para medir poderão escrever: “A frente da sala possui 15 (quinze) cúbitos e mais um pouco”.

Após as medições, escreverão na atividade impressa se o cúbito inteiro conseguiu medir toda a sala de aula. Se não, será preciso explicar o que aconteceu.

A figura 8, mostra onde os alunos devem escrever, na atividade impressa, as suas respostas:

Figura 8 – Local da atividade impressa onde as medidas da sala deverão ser escritas

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1. Quantos cúbitos possui a frente da sala de aula?	
2. Quantos cúbitos possui o fundo da sala de aula?	
3. Quantos cúbitos possui os dois lados da sala de aula?	
4. Quantos cúbitos a sala de aula possui no total?	
5. O cúbito inteiro conseguiu medir a frente, fundo e os lados da sala de aula, sem sobrar um pedaço sequer para ser medido? Explique o que aconteceu.	

Fonte: elaborado pela autora.

Posteriormente, os resultados devem ser discutidos entre a turma. Em seguida, a pesquisadora lançará a seguinte questão para discussão:

- **O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?**

Portanto, o objetivo desta segunda tarefa de aprendizagem é que os alunos percebam que os instrumentos de medida evoluíram ao decorrer da história, ao perceberem que os egípcios utilizavam cordas para medir. Além disso, os alunos devem compreender que, para medir, é necessário fracionar o cúbito, já que este inteiro não é suficiente, introduzindo, então, o surgimento do conceito de fração.

Parte 3

A terceira parte da história em quadrinho, conta que os agrimensores mediram as terras assim como os alunos mediram a sala de aula, usando a corda como instrumento de medida e tendo o cúbito como unidade de medida. Assim, os agrimensores se depararam com um problema: o cúbito inteiro não era suficiente para fazer as medições.

Portanto, será perguntado aos alunos:

- **Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?**

Com isso, subentende-se que os alunos indicarão que é necessário fracionar o cúbito, pois isso terá sido discutido na tarefa de aprendizagem anterior.

Após essa discussão será dada continuidade a leitura da história em quadrinho, confirmando que na época, foi necessário fracionar o cúbito, sendo este o motivo para o surgimento das frações. A aula terminará levando os alunos a compreenderem que o surgimento das frações se deve a uma necessidade de medir, ou seja, a unidade de medida padrão da época, que era cúbito, não foi suficiente para fazer as medições, sendo necessário subdividi-lo.

Portanto, esta primeira aula tem como objetivo compreender o processo histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir.

***

A ***segunda aula*** tem como objetivo geral introduzir o conceito de fração a partir da comparação entre duas grandezas, sendo a grandeza de comprimento, para em seguida obter um modelo gráfico e literal da relação geral frações equivalentes.

Para isso, como objetivo específico, os alunos devem se apropriar, a partir da história do surgimento do conceito de fração, do motivo pelo qual é necessário submeter-se a um denominador comum quando se quer realizar a operação de adição com denominadores diferentes.

Diante disso, será feita uma revisão da aula anterior mencionando que as frações surgiram devido a uma necessidade em medir, cuja unidade de medida existente na época, o cúbito, não foi suficiente para fazer a medição, precisando subdividi-lo. Em seguida, será lançada a seguinte questão:

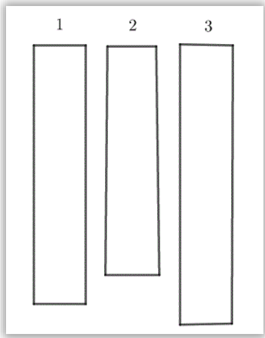
- **Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida?**

Assim, haverá um momento para que os grupos possam discutir sobre.

Após as discussões, será explicado o motivo de não se utilizar o cúbito. Para isso, será pedido aos alunos que comparem os comprimentos que foram utilizados na aula anterior para medir a sala de aula, colocando-os um ao lado do outro.

A figura 9 traz uma ilustração, como exemplo, mostrando uma possível comparação entre os comprimentos:

Figura 9 – Comparação entre os comprimentos



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Dessa forma, será perguntado:

- **Qual é a diferença entre os comprimentos utilizados para medir a sala de aula?**

Com isso, os alunos devem perceber que estes não são iguais porque o valor do cúbito varia, ou seja, nem sempre a medida do cotovelo até o dedo médio de uma pessoa é igual ao de outra. Portanto, para que os comprimentos sejam iguais

> [...] se faz necessária a opção, em comum acordo, por uma mesma unidade de medida. Nesse momento, o professor traduz a necessidade histórica de que as pessoas, no mundo inteiro, também fizeram um acordo sobre a adoção de algumas medidas, chamadas simplesmente de medidas ou unidades de medida (ROSA, 2012, p. 185).

Sendo assim, será discutido que, para medir comprimentos, as pessoas adotaram unidades de medida padrão, como o metro (m) e o centímetro (cm) (ROSA, 2012).

Em seguida os alunos serão questionados:

- **Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes?**

Portanto, por meio da comparação entre os comprimentos e a necessidade histórica de uma mesma unidade de medida, pretende-se que os alunos, através de um diálogo, percebam, segundo Rosa (2012, p. 185), com relação aos números racionais, "[...] que só se realiza as operações com os números obtidos de medidas com a mesma unidade [...]". Com isso, compreenderão por que é necessário remeter-se a um denominador comum, ou seja, recorrer a uma mesma unidade de medida (ROSA, 2012).

Em seguida, será recordada as frações da herança $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, perguntando:

- **De acordo com o que foi discutido até o momento, explique porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?**

Dessa forma, os alunos devem compreender, por meio de uma discussão, que se tomarmos, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ significa que, segundo Rosa (2012, p. 185), "[...] em um caso, a unidade foi dividida em três partes e se tomou uma delas e, no outro, em duas partes e também se tomou uma delas". O mesmo vale para a fração $\frac{1}{9}$. Diante disso, conclui-se que "é evidente que são diferentes 'medidas' e, portanto, não se pode somar. Para somá-las há que levá-las a uma mesma unidade medida – denominador comum" (TALIZINA[8], 1987, p. 52, apud ROSA, 2012, p. 185).

Tendo se apropriado do motivo histórico pelo o qual deve-se recorrer a uma mesma unidade de medida, ou seja, a um mesmo denominador, e sabendo que, para isso, é necessário obter frações equivalentes, pois foi abordado na primeira ação de aprendizagem, agora, os alunos devem ir em busca de um modelo de como obter frações equivalentes para realizar a operação de adição quando os denominadores não forem iguais.

Para isso, será feita a seguinte pergunta aos alunos:

- **Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?**

Essa pergunta tem como objetivo introduzir o conceito de fração, e criar uma base para desenvolver um modelo gráfico e literal para obter frações equivalentes.

---

8 TALIZINA, N. F. **La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares**. Moscu: Editorial Progresso, 1987.

Diante disso, será promovida uma discussão entre a turma, levando-os a perceber que medir, segundo o nosso referencial teórico Caraça (2002, p. 29) “[...] consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes etc.”

Dessa forma, serão entregues, a cada grupo, dois barbantes, um com 40 (quarenta) centímetros e o outro com 5 (cinco) centímetros, tal como mostra a figura 10:

Figura 10 – Barbantes

Fonte: elaborado pela autora.

Sendo assim, não será mencionado o comprimento dos barbantes, mas os alunos devem obter uma fração que representa a medida do comprimento menor em relação ao maior.

Após a entrega dos barbantes será dito aos alunos:

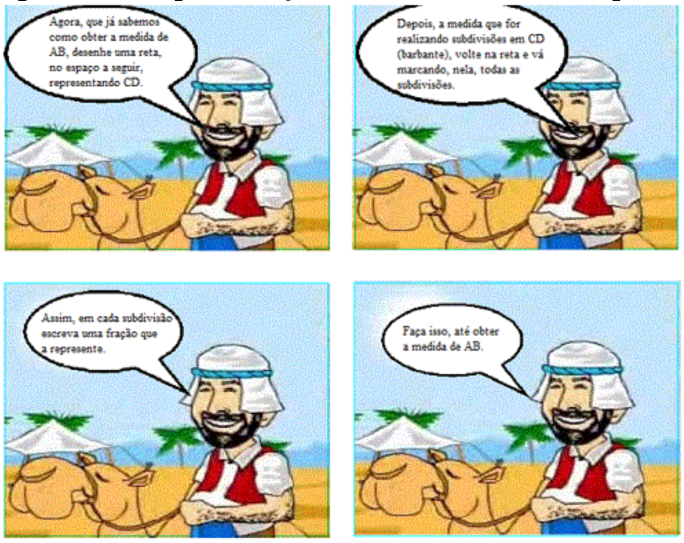
- **Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?**

Essa tarefa de aprendizagem consiste em tomar CD como unidade de medida para obter qual é o tamanho de AB, ou seja, por meio de um diálogo e reflexão, os alunos devem perceber para identificar a mediada de AB, é necessário obter um número de vezes que AB cabe em CD. Assim, será possível obter uma fração que representa a medida de AB em relação a CD e, para isso, segundo o nosso referencial teórico, Caraça (2002), devem ser realizadas subdivisões em CD até que coincida com AB.

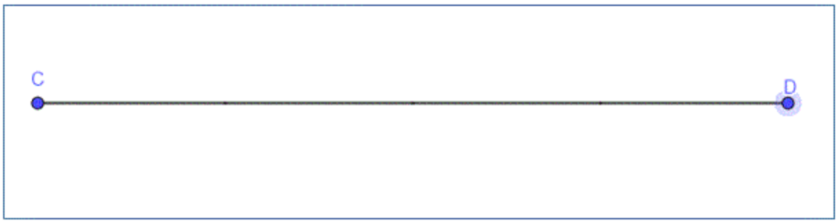
Sabendo que é necessário realizar subdivisões em CD para obter a medida de AB, os alunos devem registrar, na atividade impressa, todas as subdivisões. Dessa forma, primeiramente será pedido aos alunos que façam uma representação, na atividade impressa, do comprimento CD.

A figura 11 ilustra uma possível representação:

Figura 11 – Representação de CD na atividade impressa



Fonte: elaborado pela autora

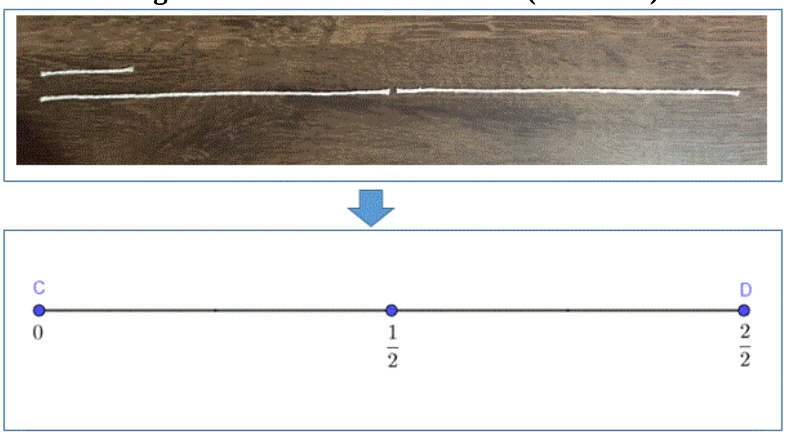


Fonte: elaborado pela autora

Dessa forma, ao passo que forem realizando as subdivisões em CD (barbante) para obter a medida de AB, devem voltar na atividade impressa e marcar em CD todas as subdivisões escrevendo uma fração que a represente. No final, será obtido o valor de AB.

A figura 12 ilustra essa ação:

Figura 12 – Subdivisões em CD (barbante)

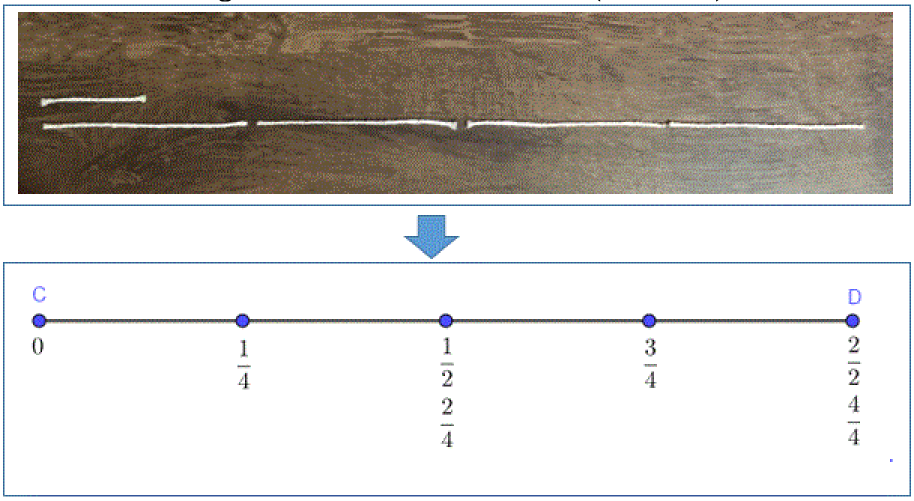


Fonte: elaborado pela autora

De acordo com a figura 12 e com o nosso referencial teórico Caraça (2002), é necessário realizar outra subdivisão em CD, já que queremos obter a medida de AB.

A figura 13 ilustra uma segunda subdivisão:

Figura 13 – Subdivisões em CD (barbante)

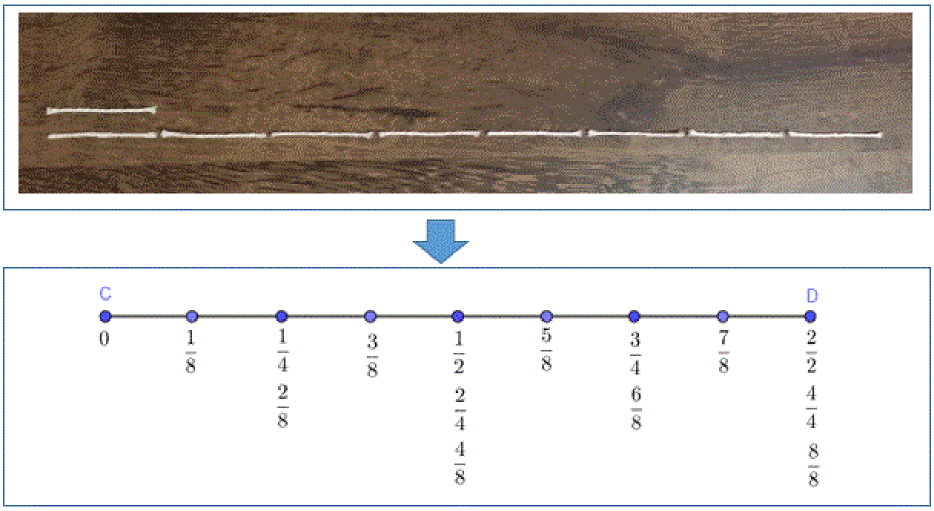


Fonte: elaborado pela autora

Novamente, de acordo com a figura 13 e com o nosso referencial teórico Caraça (2002), é necessário realizar outra subdivisão em CD, já que queremos obter a medida de AB.

A figura 14 ilustra uma terceira subdivisão:

Figura 14 – Subdivisões em CD (barbante)



Fonte: elaborado pela autora

De acordo com a figura 14, temos que a medida de AB = $\frac{1}{8}$ de CD.

Após, encontrarem a medida de AB, os alunos devem escrever na atividade impressa, o que compreenderam sobre o conceito de fração, tal como mostra a figura 15:

Figura 15 – O que você compreende sobre o conceito de fração?

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, deverão reescrever, na atividade impressa, as frações que obtiveram ao subdividir CD, conforme ilustra a figura 16:

Figura 16 – Reescrever no quadro as frações obtidas ao subdividir CD

$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{4}, \frac{2}{8}$	$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$	$\frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$

Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, os resultados serão discutidos entre a turma. Assim, será perguntado aos alunos:

- **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante), tomando o cordão maior como unidade de medida do cordão menor, o que vocês compreendem sobre o conceito de fração?**

Por meio de uma discussão e reflexão os alunos devem compreender que o conceito de fração é obtido ao se comparar duas grandezas, sendo neste caso a grandeza de comprimento. Dessa forma, podemos considerar que a fração é resultado da comparação entre dois comprimentos quando um deles é tomando como unidade de medida do outro. Assim, neste caso, CD não foi suficiente para obter a medida de AB, sendo necessário subdividi-lo.

Posteriormente, será realizada uma outra pergunta. Esta tem como objetivo construir o modelo da relação geral do objeto de estudo, ou seja, como obter frações equivalentes:

- **Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?**

Sendo assim, por meio de uma análise e reflexão, os alunos devem compreender que quanto mais se divide CD, mais frações equivalentes as anteriores podem ser estabelecidas. Assim, os estudantes devem identificar, e se apropriar, que as frações equivalentes podem ser obtidas ao multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número. Por exemplo, ao analisarem as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$, devem perceber que, para obter a fração equivalente a $\frac{1}{2}$, podem multiplicar o seu denominador e numerador pelo número 2 (dois), encontrando a fração $\frac{2}{4}$. Ou, também, podem multiplicar os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número 4 (quatro).

Além disso, utilizando a operação de divisão, é possível encontrar frações equivalentes, por exemplo, ao dividir os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número 2 (dois). Ou, se dividirmos, o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{8}$ por um mesmo número 4 (quatro) obtêm-se a fração $\frac{1}{2}$, que é sua fração equivalente. Portanto, de forma literal, os alunos devem compreender que, para encontrar frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores de uma fração pelo o mesmo número.

O quadro 3, a seguir, traz os objetivos específicos e as tarefas de aprendizagem que serão propostas nesta segunda ação do experimento de ensino, que consiste na modelação da relação geral do objeto de estudo.

Quadro 3 – Síntese das aulas que compõem a segunda ação de aprendizagem

Ação 2	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	**TAREFAS DE APRENDIZAGEM**
	• Compreender que os instrumentos de medida existentes passaram por um processo de transformação, ou evolução no decorrer da história e que isso continua acontecendo; • Compreender que, para medir a sala de aula, devem ser realizadas subdivisões no cúbito;	• Leitura da história em quadrinho (PARTE 1). Indicar algum instrumento de medida, que existe atualmente, que pode ser utilizado para medir as terras às margens do rio Nilo. • Leitura da história em quadrinho (PARTE 2). Eleger um representante do grupo para ser o faraó para tomar a medida do cúbito. Após, medir a sala de aula

Primeira aula	• Compreender que, para medir as terra, os egípcios faziam subdivisões do cúbito e que assim surgiu o conceito de fração, devido a uma necessidade em medir.	registrando os comprimentos na atividade impressa. Em seguida, como o cúbito não inteiro não foi suficiente para medir, indicar o que se pode ser feito no cúbito para medir a sala de aula. • Leitura da história em quadrinho (PARTE 3). Ajudar os egípcios indicando uma forma de como medir as terras utilizando o cúbito.
Segunda aula	• Compreender, partir da história do surgimento do conceito de fração, o motivo pelo qual é necessário submeter-se a um denominador comum quando se quer realizar a operação de adição com denominadores diferentes; • Compreender que medir é comparar duas grandezas de mesma espécie; • Compreender que para obter a medida de AB deve-se realizar subdivisões em CD; • Compreender o conceito de fração como a comparação entre duas grandezas de mesma espécie, quando uma é tomada como unidade de medida da outra, realizando, nela, subdivisões; • Compreender que, para obter frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir o denominador e o numerador de uma fração por um mesmo número.	• Indicar um motivo pelo qual não se utiliza o cúbito como unidade de medida. • Comparar os comprimentos que foram utilizados na aula anterior para medir a sala de aula, colocando-os um ao lado do outro destacando suas diferenças. • Relacionar o fato histórico de submeter a uma mesma unidade de com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes. • Explicar porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum. • Indicar o que é medir. • Indicar uma forma de obter a medida de AB. • Indicar o conceito de fração a partir da comparação entre duas grandezas, sendo a grandeza de comprimento. • Comparar as frações obtidas ao subdividir CD, buscando padrões e semelhança, construindo um modelo para encontrar frações equivalentes.

Fonte: elaborado pela autora

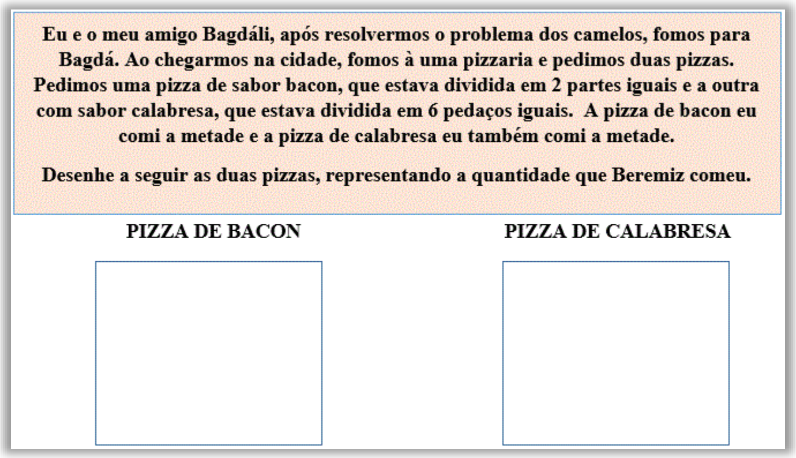
3.2.3 Ação 3: Transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo

A ***tarefa 6***, consiste em introduzir mudanças na relação geral, provocando uma descaracterização no objeto, podendo vir a causar consequências (FREITAS, 2016). Assim, os alunos, percebendo essa irregularidade, reforçam a base genética do objeto e, segundo o nosso referencial teórico Freitas (2016, p. 413) “[...] identificam seu vínculo com relações particulares que interferem na forma pela qual se apresenta na realidade e compreendem que está sujeita a um processo de transformação".

Diante disso, a primeira e única aula desta ação consiste na apresentação de uma situação particular em que se pode encontrar a adição de fração com denominadores iguais e diferentes, que é ao se comer pizza. Nesse sentido, tarefas de aprendizagem serão propostas objetivando que verifiquem situações onde os denominadores das frações foram somados, cujas situações alterarão o resultado e ocasionarão uma descaracterização do objeto. Sendo assim, para se ter o resultado correto, devem perceber que não se pode somar os denominadores das frações, mas recorrer a frações equivalentes ou conservá-los, quando os denominadores forem iguais.

Assim, a tarefa de aprendizagem inicia com Beremiz Samir afirmando que, após a resolver o "Problema dos Camelos", ele e seu amigo Bagdáli foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas, uma de sabor bacon e a outra sabor calabresa. A pizza de bacon estava dividida em duas partes iguais e a de calabresa em seis. Sendo assim, a situação de aprendizagem diz que Beremiz Samir comeu a metade da pizza de bacon e a metade da pizza de calabresa. Diante disso, os alunos precisarão representar geometricamente essa situação. A figura 17 ilustra o que se pede nesta primeira tarefa de aprendizagem:

Figura 17 – A primeira tarefa da terceira ação de aprendizagem segundo Davydov (1988)



Eu e o meu amigo Bagdáli, após resolvermos o problema dos camelos, fomos para Bagdá. Ao chegarmos na cidade, fomos à uma pizzaria e pedimos duas pizzas. Pedimos uma pizza de sabor bacon, que estava dividida em 2 partes iguais e a outra com sabor calabresa, que estava dividida em 6 pedaços iguais. A pizza de bacon eu comi a metade e a pizza de calabresa eu também comi a metade.

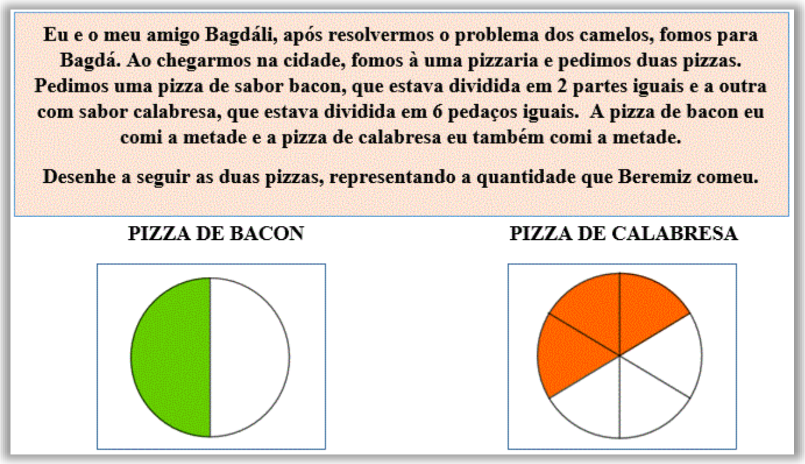
Desenhe a seguir as duas pizzas, representando a quantidade que Beremiz comeu.

PIZZA DE BACON **PIZZA DE CALABRESA**

Fonte: elaborado pela autora

A figura 18 ilustra uma possível representação geométrica para a quantidade de pedaços de pizza que Beremiz Samir comeu.

Figura 18 – Ilustração da quantidade de pedaços de pizza comidos por Beremiz Samir



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Após a representação geométrica, os alunos devem discutir, em grupo, e responder a seguinte questão:

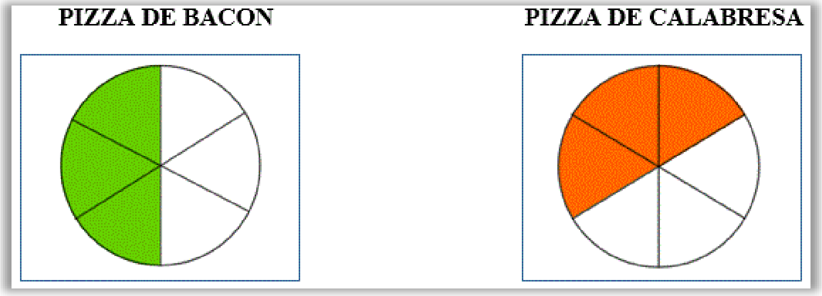
- **Quando fomos embora da pizzaria, eu perguntei ao meu amigo Bagdáli qual é a fração que representa a quantos pedaços iguais de pizza que eu comi. Bagdáli disse que essa fração é igual a $\frac{4}{8}$. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**

Para sabermos se a fração $\frac{4}{8}$ está correta, basta somarmos as frações que correspondem a quantidade de pizza que Beremiz Samir comeu, ou seja, somar $\frac{1}{2} + \frac{3}{6}$. Como são frações com denominadores diferentes é necessário estabelecer um denominador comum. Assim, podemos utilizar a modelação literal estabelecida na ação de aprendizagem anterior, multiplicando o denominador e o numerador da fração $\frac{1}{2}$ por um mesmo número 3 (três).

$$\frac{1x3}{2x3} = \frac{3}{6}$$

Diante disso, temos que a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é a fração $\frac{3}{6}$. A figura 19 traz uma ilustração da representação geométrica dessa situação:

Figura 19 – Representação geométrica das frações ao reduzi-las a um mesmo denominador



Elaborado pela autora – Software GeoGebra

Agora podemos realizar a adição das frações que representam a quantidade de pizza comida por Beremiz Samir:

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Diante desse resultado, é possível perceber que Beremiz Samir comeu uma pizza inteira de 6 (seis) pedaços de mesmo tamanho, sendo 3 (três) fatias de pizza de Bacon e 3 (três) fatias de pizza de Calabresa. Portanto, isso confirma que Bagdáli estava errado, pois não considerou que as pizzas possuem quantidades de pedaços diferentes, cuja situação acarretaria na determinação de frações equivalentes, ou seja, recorrer a uma mesma quantidade de pedaços em ambas as pizzas (denominadores iguais) para que possa realizar a operação de adição e, por fim, responder quantos pedaços iguais de pizza foram comidos por Beremiz Samir.

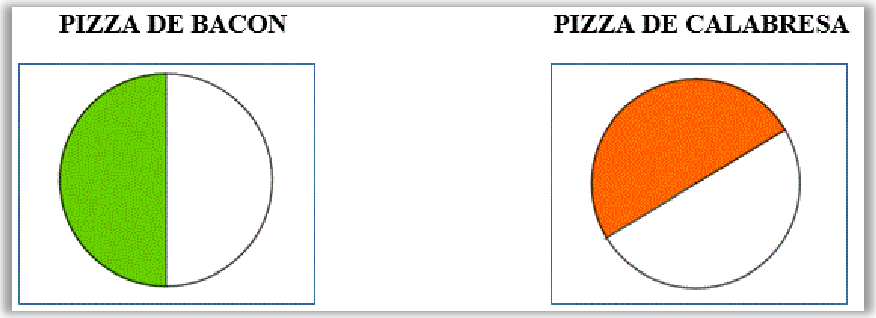
Dessa forma, ao invés disso, somou os denominadores das frações, causando consequências, já que não se pode somá-los, pois estes representam a unidade, ou seja, a pizza inteira. Assim, cada pizza não possui 8 (oito) pedaços iguais, como indica a fração $\frac{4}{8}$, mas após a redução a um mesmo denominador (mesma quantidade de pedaços em cada pizza) é possível perceber que estas possuem na verdade, 6 (seis) pedaços iguais de pizza.

Uma outra maneira de pensar esse problema é reduzindo a fração $\frac{3}{6}$ para $\frac{1}{2}$ dividindo o denominador e o numerador por 3 (três):

$$\frac{3 \div 3}{6 \div 3}=\frac{1}{2}$$

Realizando a operação de adição temos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$. Logo, temos que Beremiz Samir comeu uma pizza inteira, dividida em dois pedaços iguais, sendo a metade de bacon e a metade de calabresa, tal como ilustra a figura 20:

Figura 20 – Representação geométrica das frações ao reduzi-las a um mesmo denominador



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Após resolverem essa tarefa de aprendizagem, uma outra será proposta:

- **Depois disso, eu perguntei para Bagdáli qual é a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza de calabresa eu e ele comemos juntos. Como se sabe eu comi a metade, já o Bagdáli comeu todo o restante. Diante disso, Bagdáli afirmou que comemos juntos $\frac{6}{12}$ da pizza. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**

Para resolvermos a essa questão basta somarmos a quantidade de pizza de calabresa comida por Beremiz Samir, mais a quantidade de pizza comida por Bagdáli. Como se sabe, a pizza está dividida em 6 (seis) partes iguais, onde Beremiz Samir comeu a metade. Logo temos que a fração $\frac{3}{6}$ corresponde a essa situação. Como a pizza está dividida em 6 (seis) partes iguais e Beremiz Samir comeu a metade, temos que o restante equivale a quantidade comida por Bagdáli que é representada pela fração $\frac{3}{6}$.

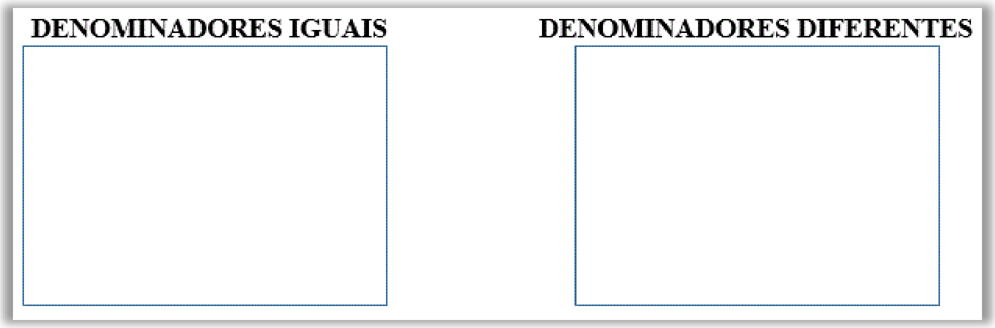
Diante disso, como queremos descobrir quantos pedaços de pizza os dois comeram juntos, basta somarmos as frações:

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Esse resultado quer dizer que ambos comeram juntos 6 (seis) pedaços de pizza de um total de 6 (seis), ou seja, comeram juntos a pizza toda. Isso implica que o resultado apontado por Bagdáli não está correto, pois somou os denominadores das frações e, como é possível notar na representação geométrica, não há 12 (doze) pedaços de pizza de calabresa.

Após responderem essa tarefa de aprendizagem, os alunos devem escrever o que compreendem sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes, tal como mostra a figura 21:

Figura 21 – O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes?



Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, os resultados devem ser discutidos entre toda a turma.

Assim sendo, espera-se que, por meio de situações que alteram o resultado, causando mudanças na relação geral e provocando uma descaracterização no objeto, possam contribuir para que os alunos se apropriem do motivo pelo qual, na adição de fração, deve-se conservar o denominador quando estes forem iguais e porque deve-se recorrer a frações equivalentes quando estes forem diferentes.

Outro ponto a destacar é que sabemos o "Problema dos Camelos" não menciona que Beremiz Samir e Bagdáli foram a uma pizzaria após a solução do problema. Dessa forma, criamos as tarefas de aprendizagem apresentadas anteriormente a fim de ilustrar uma situação particular que envolvesse o objeto de estudo.

Portanto, o quadro 4 a seguir, traz os objetivos específicos e as tarefas de aprendizagem que serão propostas nesta terceira ação do experimento de ensino, que consiste na transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo a fim de estudar as suas propriedades em forma pura.

Quadro 4 – Síntese da aula que compõe a terceira ação de aprendizagem

Ação 3	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	**TAREFAS DE APRENDIZAGEM**
Primeira aula	• Compreender que na adição de fração não se deve somar os denominadores; • Compreender que na adição de fração com denominadores iguais conserva-se o denominador, pois este representa o todo. • Compreender que na adição de fração com denominadores diferentes deve-se recorrer a	• Representação geométrica das frações que correspondem a quantidade de pedaços da pizza de bacon e da pizza de calabresa que foram comidos por Beremiz Samir. • Somar as frações que correspondem a quantidade de pedaços iguais de pizza que foram comidos por Beremiz Samir, a fim de verificar se a reposta de Bagdáli

	equivalência de fração, reduzindo os denominadores a uma mesma quantidade/valor em comum.	está correta. • Somar as frações que correspondem a quantidade de pedaços de pizza de calabresa Beremiz Samir e Bagdáli comeram juntos, a fim de verificar se a resposta de Bagdáli está correta. • Indicar o que compreendem sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes.

Fonte: elaborado pela autora

3.2.4 Ação 4: Construção do sistema de tarefas particulares

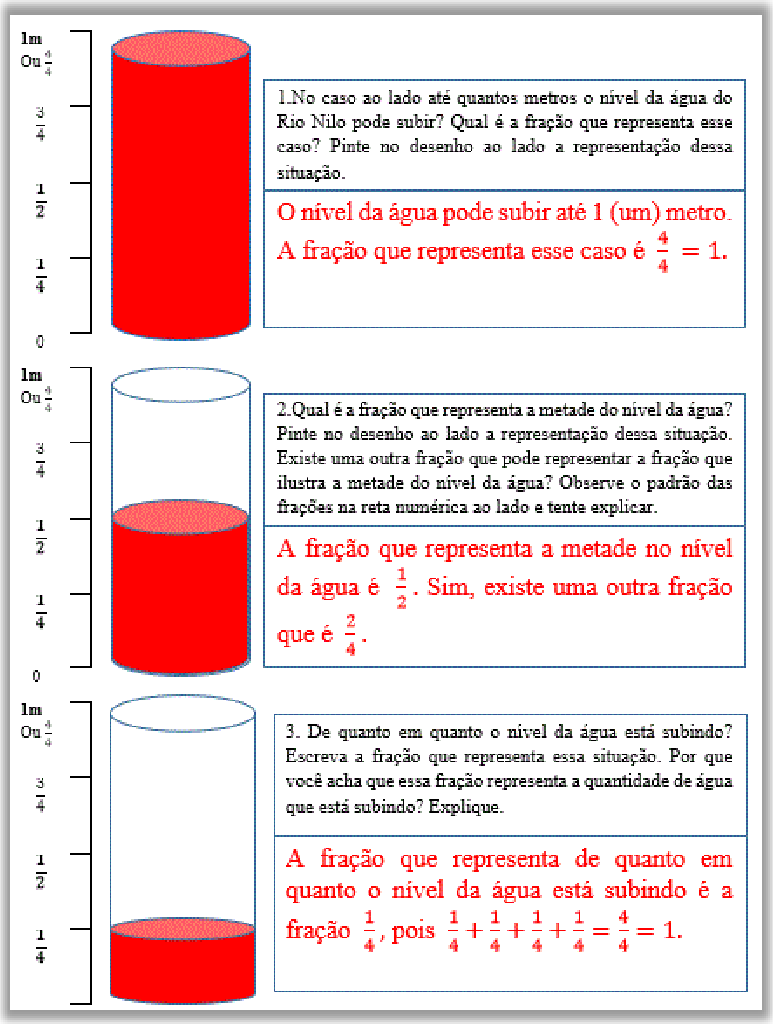
A ***tarefa 7***, pertencente a quarta ação de aprendizagem consiste na resolução de questões particulares que envolvem diversas situações reais e gerais, “[...] que podem ser solucionadas por um procedimento único (geral), assimilado durante a execução das ações anteriores de aprendizagem” (DAVYDOV, 1988, p. 175).

Diante disso, as tarefas de aprendizagem desta ação serão divididas em duas aulas. A primeira aula será composta por duas tarefas: explorando as frações com as cheias do rio Nilo, e explorando as frações com a barra de chocolate. Abordaremos, a seguir, as tarefas da ***primeira aula.***

A tarefa 1 aborda situações de aprendizagem sobre as cheias do rio Nilo. Sendo assim serão trabalhados conteúdos, tais como: representação geométrica de fração, adição de fração com denominadores iguais e frações equivalentes.

Dessa forma, a seguir, a figura 22 ilustra as três primeiras questões, bem como as respostas esperadas para estas:

Figura 22 – Questões 1, 2 e 3 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

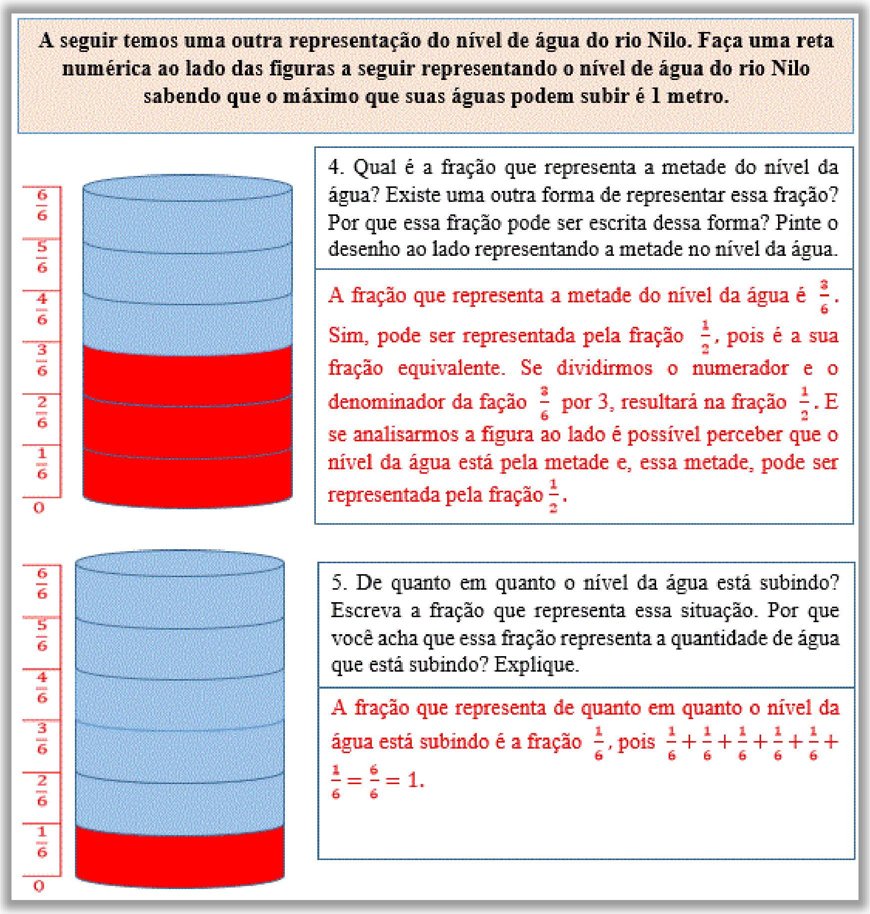
Portanto, a questão 1, consiste em pintar no desenho ao lado qual é a fração que corresponde até quantos metros o nível da água do rio Nilo pode subir. Sendo assim, esse valor corresponde a 1 (um) metro, cuja resposta indica que deve-se pintar todo desenho. Essa questão tem como objetivo que os alunos percebam, através da pintura do desenho, que a fração $\frac{4}{4}$ equivale a 1 (um), ou seja, que representa o todo.

A questão 2 se resume em determinar a fração que representa a metade do nível da água e pintar, no desenho ao lado, o seu valor correspondente. Além disso, devem indicar uma fração que representa a fração $\frac{1}{2}$, cuja resposta é a fração $\frac{2}{4}$. Diante disso, esta questão tem como propósito explorar o conceito de frações equivalentes.

Por fim, a questão 3, consiste em determinar a fração que corresponde de quanto em quanto o nível da água está subindo, cuja resposta é a fração $\frac{1}{4}$. Outro ponto a destacar é que devem comprovar que a fração $\frac{1}{4}$ é a resposta correta para essa pergunta. Sendo assim, podem realizar a seguinte operação de adição: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Como o nível da água subiu até 1 (um) metro, logo temos que a fração $\frac{1}{4}$ corresponde de quanto em quanto o nível da água do rio Nilo está subindo. Portanto, temos que o objetivo dessa terceira questão é explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais.

Prosseguindo, as atividades seguintes, bem como as suas respostas, podem ser vistas na figura 23:

Figura 23 – Questões 3 e 4 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

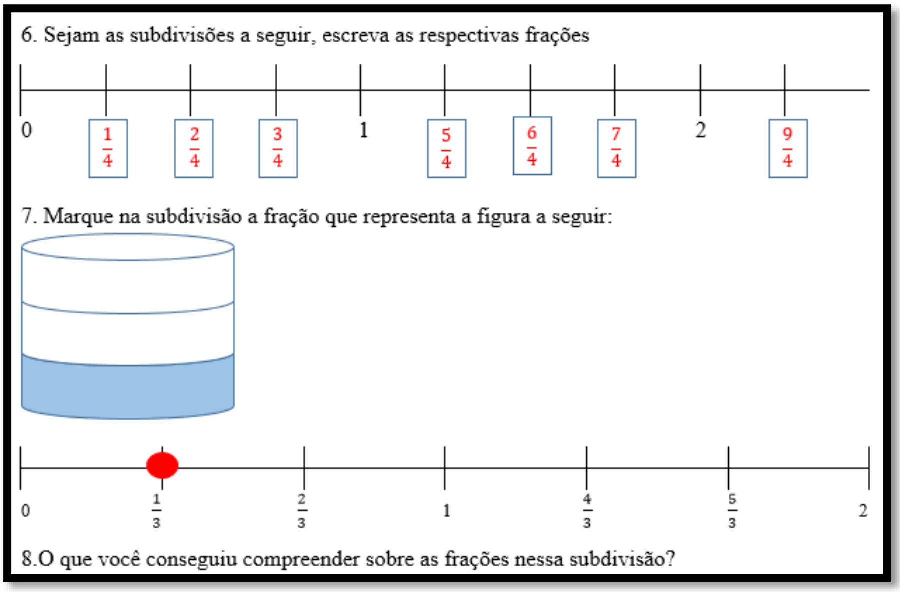
A questão 4, consiste em construir as subdivisões do desenho, e determinar a fração que representa a metade do nível da água, cuja resposta é a fração $\frac{3}{6}$. Em seguida os alunos devem pintar no desenho a parte em que corresponde a essa fração.

Uma outra forma de escrever a fração $\frac{3}{6}$, é obtendo a sua fração equivalente, dividindo o numerador e o denominador pelo número 3 (três), resultando em $\frac{1}{2}$. Portanto, a questão 4 tem como objetivo, explorar o conceito de fração equivalente.

A explicação da questão 5 é análoga a questão 3. Além disso, também tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais.

A seguir, são apresentadas as questões 6, 7 e 8. Além disso, as respostas esperadas para essas questões 6 e 7 também são ilustradas, tal como mostra a figura 24:

Figura 24 – Questões 6, 7 e 8

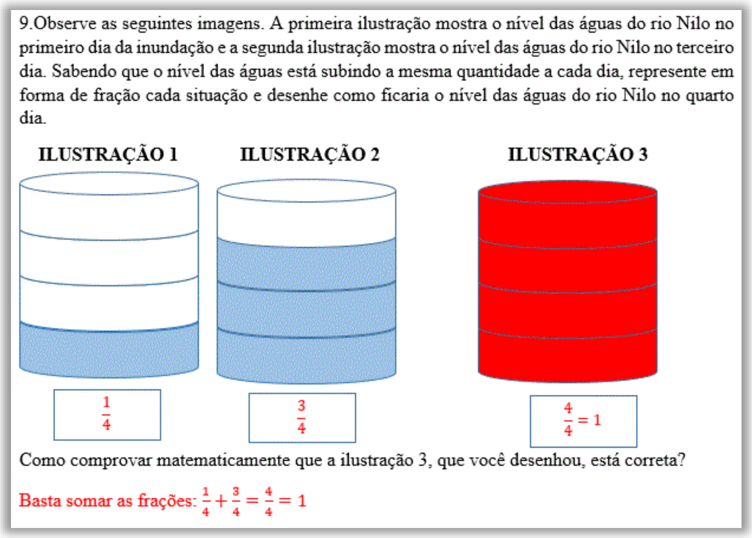


Fonte: elaborado pela autora

A questão 6, consiste em escrever qual é a fração que representa os pontos demarcados pelos retângulos azuis. Essa questão tem como objetivo reconhecer as frações nessa subdivisão, além de compreender que há frações onde os numeradores são maiores que os denominadores. A questão 7, baseia-se em visualizar a ilustração geométrica e reconhecer que esta pode ser representada pela fração $\frac{1}{3}$ na subdivisão. A questão 8, consiste em escrever a compreensão de fração nessa subdivisão.

Prosseguindo, a próxima questão, bem como a sua resposta esperada, é ilustrada na figura 25 a seguir:

Figura 25 – Questão 9 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

A questão 9 consiste em identificar a fração que corresponde qual é o nível das águas no quarto dia, sabendo que este está aumentando com a mesma proporção. Dessa forma, como a ilustração 1 representa o primeiro dia, temos que a fração, que corresponde o aumento gradativo das águas, é $\frac{1}{4}$. Sendo assim, como queremos saber qual é a fração que corresponde ao nível das águas no quarto dia, basta analisar a ilustração 2, que representa o terceiro dia do nível das águas, cuja fração é $\frac{3}{4}$. Assim, se somamos as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, o resultado é $\frac{4}{4}$, ou seja, no quarto dia as águas terão aumentado 1 (um) metro. Por fim, deverão representar geometricamente essa situação como mostra a ilustração 3. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais e a representação geométrica e numérica de fração.

Um ponto a destacar é que as situações de aprendizagem envolvendo as cheias do rio Nilo são ilustrativas, ou seja, não significam que ocorreram da maneira como são descritas nas tarefas. Dessa forma, isso será mencionado pela pesquisadora e, posteriormente, trará essa ilustração para a realidade, mencionando porque acontecem as cheias dos rios e lagos.

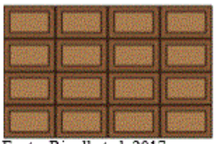
Sendo assim, as cheias ocorrem devido ao volume pluviométrico excessivo (as chuvas). Essa situação, em consonância com a retirada da cobertura vegetal natural (e.g., realização de atividades antropogênicas), ocasiona um desequilíbrio nos processos físicos, químicos e biológicos dos sistemas naturais, facilitando as enchentes (MARTEN; MINELLA, 2002).

Prosseguindo, a tarefa 2 da ***primeira aula*** consiste em explorar situações relacionadas a uma barra de chocolate. Assim, as questões que serão expostas a seguir foram elaboradas por Ripoll et al (2017) e, as utilizamos, pois acreditamos que podem contribuir para a construção conceitual sobre fração “[...] e a conduzir os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão [...] e a levá-los a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados” (RIPOLL et al, 2017, p. 5).

Sendo assim, a seguir apresentaremos as questões sobre a barra de chocolate, bem como as suas respostas esperadas, tal como mostra a figura 26:

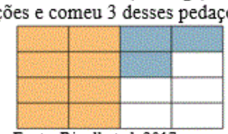
Figura 26 – Questões “a” e “b” sobre a barra de chocolate

1 (RIPOLL et al, 2017) Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Fonte: Ripoll et al, 2017.

Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege). Miguel quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Fonte: Ripoll et al, 2017

Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, indicamos que as quantidades comidas são: $\frac{1}{2}$ por Alice e $\frac{3}{16}$ por Miguel. Os pedaços da barra (quebrados por Miguel de acordo com as marcações na barra) correspondem a uma subdivisão dessa unidade. Observe que ambas as frações da barra de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser obtidas a partir dessa subdivisão: Miguel comeu 3 pedaços e a quantidade comida por Alice corresponde a 8 pedaços.

a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?
A barra de chocolate possui, ao todo, 16 retângulos de chocolate. Assim, se tomarmos 1 pedaço da barra, teremos que a fração que corresponde a essa situação é a fração $\frac{1}{16}$.

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$$

Fonte: elaborado pela autora

A questão “a” consiste em responder qual é a fração que corresponde a um pedaço da barra de chocolate. Dessa forma, como a barra de chocolate possui 16 retângulos de chocolate temos que a fração que corresponde a essa situação é a fração $\frac{1}{16}$. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o significado da relação parte/todo.

Já a questão “b”, é necessário identificar o numerador da fração, representando a quantidade da barra de chocolate que foi comida por Alice. Dessa forma, essa questão tem como objeto reconhecer $\frac{1}{2}$ é equivalente a fração $\frac{8}{16}$.

A seguir, na figura 27, serão apresentadas as questões “c” e “d”, sobre a barra de chocolate, bem como as suas respostas esperadas.

Figura 27 – Questões “c” e “d” sobre a barra de chocolate

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

Alice comeu $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate e Miguel comeu $\frac{3}{16}$. Para sabermos qual é a fração da barra de chocolate que foi comida por Alice e por Miguel, juntos, basta somarmos $\frac{1}{2}$ mais $\frac{3}{16}$: Como são denominadores diferentes, é necessário reduzi-los a um mesmo valor em comum. Para isso, basta analisarmos o desenho para perceber que a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é a fração $\frac{8}{16}$, ou multiplicar o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{2}$ pelo número 8: $\frac{1x8}{2x8} = \frac{8}{16}$. Assim, temos que, $\frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$. Portanto, Alice e Miguel comeram, juntos, $\frac{11}{16}$ da barra de chocolate.

d) Que fração da barra de chocolate não foi comida?

A barra de chocolate, ao todo, pode ser representada pela fração $\frac{16}{16}$. Diante disso, para responder qual é a fração da barra de chocolate não foi comida, basta subtrair a fração que corresponde a quantidade da barra de chocolate comida por Alice e Migue, juntos, da fração que corresponde a quantidade total da barra de chocolate: $\frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$.

Fonte: elaborado pela autora

A questão “c” consiste em obter a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida por Alice e Miguel, juntos, cuja resposta é a fração $\frac{11}{16}$. Assim, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, pois é necessário somar a fração $\frac{1}{2}$, que corresponde a quantidade da barra de chocolate comida por Alice, com a fração $\frac{3}{16}$ que corresponde a quantidade comida por Miguel. Como as frações possuem denominadores diferentes, é necessário recorrer a obtenção de uma fração equivalente reduzindo, por fim, os denominadores a uma mesma unidade.

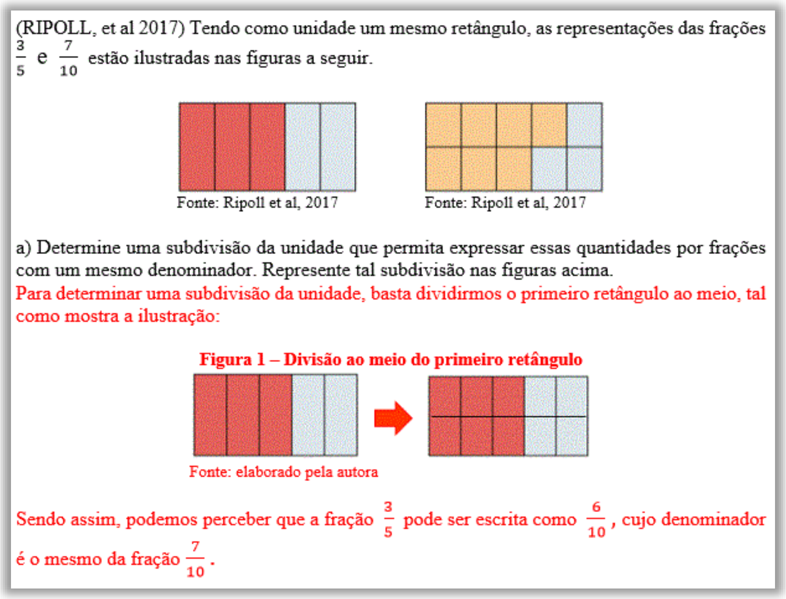
A questão “d” solicita a identificação da fração que representa quanto da barra de chocolate não foi comida. Para isso, basta subtrair, da fração que representa toda a barra de chocolate, a fração $\frac{11}{16}$, resultando na fração $\frac{5}{16}$. Sendo assim, essa questão consiste em aplicar o conceito de subtração de fração com denominadores iguais em uma situação particular.

***

A ***segunda aula*** da quarta ação de aprendizagem segundo Davydov (1988), consiste em dar continuidade a resolução de situações particulares. Sendo assim, serão propostas duas tarefas de aprendizagem: explorando as frações no retângulo, e explorando as frações no caminho para a escola.

A questão “a”, da primeira tarefa de aprendizagem, bem como a sua resposta esperada, pode ser visualizada na figura 28:

Figura 28 – Questão “a” da tarefa explorando as frações no retângulo



(RIPOLL, et al 2017) Tendo como unidade um mesmo retângulo, as representações das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ estão ilustradas nas figuras a seguir.

Fonte: Ripoll et al, 2017 Fonte: Ripoll et al, 2017

a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.
Para determinar uma subdivisão da unidade, basta dividirmos o primeiro retângulo ao meio, tal como mostra a ilustração:

Figura 1 – Divisão ao meio do primeiro retângulo

Fonte: elaborado pela autora

Sendo assim, podemos perceber que a fração $\frac{3}{5}$ pode ser escrita como $\frac{6}{10}$, cujo denominador é o mesmo da fração $\frac{7}{10}$.

Fonte: elaborado pela autora

A questão “a” tem como objeto explorar o conceito de fração equivalente, reduzindo a fração $\frac{3}{5}$ a mesma unidade da fração $\frac{7}{10}$, por meio da subdivisão do primeiro retângulo.

Continuando, as questões “b”, “c” e “d”, bem como as suas respostas, são ilustradas na figura 29:

Figura 29 – Questões “b”, “c” e “d” da tarefa explorando as frações no retângulo

b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

Para escrever uma fração igual $\frac{7}{10}$, basta dividirmos o segundo retângulo da seguinte maneira:

Figura 2 – Subdivisão do segundo retângulo

Fonte: elaborado pela autora

Diante disso, temos que uma fração igual a $\frac{7}{10}$ é a fração $\frac{14}{20}$. O mesmo processo pode ser utilizado para obter frações iguais a $\frac{3}{5}$. Portanto, para obter frações iguais, ou melhor, frações equivalentes, basta realizar sucessivas subdivisões na unidade.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

Uma outra forma de obter frações iguais, ou equivalentes as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, é multiplicado o denominador e o numerador de cada fração por um mesmo número. Para obter uma fração equivalente a $\frac{7}{10}$, basta multiplicar, por exemplo, o denominador e o numerador dessa fração pelo número 3. Assim, temos que a sua fração equivalente é $\frac{21}{30}$.

d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Para isso, basta somarmos a fração que corresponde ao primeiro retângulo, que é $\frac{3}{5}$, mais a fração que representa o segundo retângulo, cuja fração é $\frac{7}{10}$. Como são denominadores diferentes, é necessário recorrer a uma mesma unidade. Como se sabe, a fração $\frac{3}{5}$ é equivalente a fração $\frac{6}{10}$. Diante disso, temos que $\frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$. Portanto, como o numerador é maior que a unidade podemos considerar que as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior que um retângulo.

Fonte: elaborado pela autora

A questão “b” consiste em explorar o conceito de frações equivalentes ao subdividir as retângulos que correspondem as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$. Sendo assim, a medida em que subdivide os retângulos, mais frações equivalentes as anteriores são possíveis de obter.

A questão “c” também é relacionada ao conceito de fração equivalente. Dessa forma, para identificar frações que podem representar as $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, basta multiplicar os numeradores e os denominadores por um mesmo número.

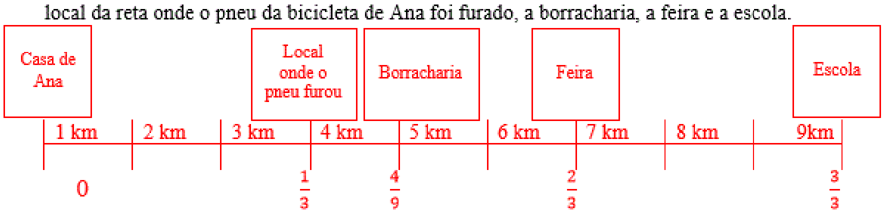
Por fim, a questão “d” constitui-se em determinar se as frações que correspondem a área vermelha e bege, juntas, determinam uma região menor, maior ou igual a um retângulo. Para responder a essa questão, basta somar as frações correspondentes as duas áreas, cuja resposta é a fração $\frac{13}{10}$. Esse resultado indica que as duas áreas juntas determinam uma região maior que um retângulo. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, o conceito de fração equivalente, e o conceito de frações impróprias, que é quando o numerador é maior que o denominador.

Prosseguindo, na figura 30, a seguir, traz a primeira questão, bem como a sua resposta, da tarefa 2 planejada para a ***segunda aula:***

Figura 30 – Questão “a” da tarefa explorando as frações no caminho para a escola

1. (Elaborado pela autora) Todos os dias, Ana pedala 9 km até chegar em sua escola. Certo dia, o pneu de sua bicicleta furou completados $\frac{1}{3}$ do caminho. Por sorte, cerca de um quilômetro depois havia uma borracharia onde Ana empurrou a sua bicicleta até chegar no local. O pneu foi remendado e, mais que depressa, Ana pegou novamente a sua bicicleta e saiu em disparada para a escola. Completados $\frac{2}{3}$ do caminho Ana se deparou com uma feira de frutas e resolveu comprar uma maça. Por fim, depois de algum tempo, Ana chega a escola! E ainda bem que conseguiu chegar a tempo!

a) Faça uma reta numérica mostrando todo o percurso percorrido, em forma de fração, desde a casa de Ana até a escola. Além disso, na reta numérica represente em desenho a casa de Ana, o local da reta onde o pneu da bicicleta de Ana foi furado, a borracharia, a feira e a escola.



Fonte: elaborado pela autora

A questão “a” consiste em desenhar o caminho desde a casa de Ana até a escola de acordo com o que se pede no enunciado, a fim de criar subsídios para a compreensão do adição de fração e frações equivalentes que serão trabalhadas nas questões seguintes.

As questões “b”, “c”, “d”, “e”, “f” e “g”, bem como as suas respostas, podem ser visualizadas na figura 31, a seguir:

Figura 31 – Questões “b”, “c”, “d”, “e”, “f” e “g” da tarefa explorando as frações no caminho para a escola

b) O pneu da bicicleta de Ana furou depois de quantos quilômetros percorridos?
O pneu da bicicleta de Ana furou depois de 3km percorridos.
c) Existe uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta furou? Explique.
Sim, a sua fração equivalente, que é $\frac{3}{9}$
d) Qual é a fração que representa a localização da borracharia?
A fração que representa a localização da borracharia é $\frac{4}{9}$
e) Na reta numérica qual é o número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do caminho da casa de Ana até a feira?
O Número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do cominho é o número 6, pois Ana terá percorrido 6 quilômetros até feira.
f) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ do caminho?
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Sendo assim, a fração $\frac{2}{3}$ indica que Ana se localiza na feira.
g) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{3}{9}+\frac{2}{3}$ do caminho? Explique.
Como são frações com denominadores diferentes, é necessário reduzi-las a uma mesma unidade. Para isso, basta observar a reta numérica para perceber que $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Sendo assim, agora, é possível realizar a operação de adição $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}$. Portanto, a fração $\frac{3}{3}$ indica que Ana estará na escola.

Fonte: elaborado pela autora

Na questão “b”, basta analisar o desenho realizado na letra “a”, a fim de identificar com quantos quilômetros percorridos o pneu da bicicleta de Ana furou. Assim, a fração que indica essa situação é $\frac{1}{3}$. Logo, a resposta é que o pneu furou depois de 3 (três) quilômetros percorridos. Portanto, esta questão tem como objeto explorar o conceito de fração equivalente, pois a unidade possui 9 (nove) repartições e, também, pode ser subdividida em 3 (três). Sendo assim, a fração que seria $\frac{3}{9}$ pode ser escrita como $\frac{1}{3}$, o que facilita responder que o pneu da bicicleta de Ana furou com 3 (três) quilômetros percorridos.

A questão "c" resume-se em determinar uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$, ou seja, se há uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta de Ana furou. Dessa forma, ao analisarmos o desenho realizado na letra "a", é possível perceber que a sua fração equivalente é $\frac{3}{9}$.

Por fim, as questões "d" e "e" tem como objetivo explorar a localização das frações desde a casa de Ana até a escola. Em seguida, a questão "f" consiste em trabalhar a adição de fração com denominadores iguais e, a última questão, visa explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes.

Portanto, o quadro 5 a seguir, traz os objetivos específicos e as tarefas de aprendizagem que serão propostas nesta quarta ação do experimento de ensino, que consiste na construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral.

Quadro 5 – Síntese das aulas que compõem a quarta ação de aprendizagem

Ação 4	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	**TAREFAS DE APRENDIZAGEM**
Primeira aula	• Compreender, por meio da tarefa explorando as frações com as cheias do rio Nilo, a representação geométrica de fração, o conceito de frações equivalentes, o conceito de adição e subtração de fração com denominadores iguais e a adição de fração com denominadores diferentes. • Compreender, por meio da tarefa explorando as frações com a barra de chocolate, o significado da relação parte/todo, o conceito de frações equivalentes, a representação geométrica de fração e o conceito de adição com denominadores iguais e diferentes.	• Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações com as cheias do rio Nilo. • Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações com a barra a chocolate**.** • Discussão e reflexão entre toda a turma sobre as resoluções das tarefas.

Segunda aula	• Compreender, por meio da tarefa explorando as frações no retângulo, o conceito de frações equivalentes, a adição de fração com denominadores iguais e diferentes e, por fim, frações impróprias; • Compreender, por meio da tarefa explorando as frações no caminho para a escola, o conceito de frações equivalentes, a adição de fração com denominadores iguais e diferentes e, por fim, o conceito de frações impróprias.	• Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações no retângulo. • Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações no caminho para a escola. • Discussão e reflexão entre toda a turma sobre as resoluções das tarefas.

Fonte: elaborado pela autora

3.2.5 Ação 5: Controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente

A ***tarefa 8*** da quinta ação de aprendizagem visa o monitoramento das ações realizadas anteriormente por meio de um exame qualitativo, ou seja, "[...] equivale à avaliação dos alunos por si próprios, tendo como referência o conteúdo de suas ações [...]" (FREITAS, 2016, p. 414-415).

Dessa forma, antes da avaliação, os alunos voltarão ao "Problema dos Camelos", a fim de solucioná-lo. Assim, espera-se que, baseando-se nos conhecimentos apropriados nas ações de aprendizagem anteriores, os alunos possam, agora, não somente utilizar a operação de adição com denominadores diferentes, mas compreender a sua essência. Nesse sentido, ao somar as frações da herança, objetiva-se que os alunos compreendam que é necessário reduzir os denominadores das frações a uma mesma unidade, recorrendo ao conceito de frações equivalentes, tal como mostra a figura 32:

Figura 32 – Somando as frações da herança recorrendo a frações equivalentes

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=?$$

Vamos somar, primeiro, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Como são denominadores diferentes, devemos reduzi-los a uma mesma unidade. Para isso basta multiplicar a fração $\frac{1}{2}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{3}$ e, em seguida, multiplicar a fração $\frac{1}{3}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1x3}{2x3}+\frac{1x2}{3x2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Agora, iremos somar a fração $\frac{5}{6}$ com a fração $\frac{1}{9}$ que restou. Como são denominadores diferentes, devemos reduzi-los a uma mesma unidade. Para isso basta multiplicar a fração $\frac{5}{6}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{9}$ e, em seguida, multiplicar a fração $\frac{1}{9}$ pelo denominador da fração $\frac{5}{6}$:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5x9}{6x9}+\frac{1x6}{9x6}=\frac{45}{54}+\frac{6}{54}=\frac{51}{54}$$

Podemos simplificar essa fração, dividindo o numerador e o denominador por 3 (três):

$$\frac{51\div 3}{54\div 3}=\frac{17}{18}. \text{ Logo, } \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

Fonte: elaborado pela autora

Ao obter a fração $\frac{17}{18}$, os alunos devem explicar o seu significado em relação a resolução do problema. Assim, como nas ações de aprendizagem anteriores foi abordada a fração representando tanto numérica quanto geometricamente a unidade, espera-se que os alunos compreendam que a fração $\frac{17}{18}$ não equivale ao todo, ou seja, falta $\frac{1}{18}$ para completar o todo. Neste caso, o todo é a herança dos 35 camelos:

> Tudo resultou, em resumo, do fato seguinte: Houve um erro do testador. A metade de um todo, mais a terça parte desse todo, mais um nono desse todo não é igual ao todo. Vejam: 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18. Para completar o todo, falta, ainda, 1/18 desse todo. O todo, no caso, é a herança dos 35 camelos. 1/18 de 35, é igual a 35/18. A fração 35/18 é igual a 1 e 17/18. Conclusão: feita a partilha, de acordo com o testador, ainda haveria uma sobra de 1 e 17/18. Beremiz, com o artifício empregado, distribuiu os 17/18 pelos três herdeiros (aumentando a parte de cada um) e ficou com a parte inteira da fração excedente (TAHAN, 2007, p. 1).

Após responderem ao problema, os alunos devem realizar, na atividade impressa, uma avaliação qualitativa de si próprios, tal como mostra a figura 33. Posteriormente, as soluções para o "Problema dos Camelos", bem como a avalição sobre o desempenho e o que compreenderam durante todas as aulas do experimento de ensino, serão discutidas entre a turma.

Figura 33 – Local da atividade impressa que o aluno deve realizar a avaliação qualitativa da aprendizagem

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Após o cumprimento das ações de aprendizagem, espera-se que os alunos possam demonstrar uma apropriação do processo lógico e histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir, e do conceito do nosso objeto de estudo que é a adição de fração com denominadores diferentes, bem como a sua relação geral, que é a determinação de frações equivalentes para reduzir os denominadores a uma mesma unidade.

Portanto, o quadro 6 a seguir, traz os objetivos específicos e as tarefas de aprendizagem que serão propostas nesta quinta ação do experimento de ensino, que consiste no controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente.

Quadro 6 – Síntese da aula que compõe a quinta ação de aprendizagem

Ação 5	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	TAREFAS DE APRENDIZAGEM
Primeira aula	• O aluno deve demonstrar ter se apropriado da fração como um objeto lógico e histórico. • O aluno deve demonstrar ter se apropriado do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, bem como a sua relação geral, que é a determinação de frações	• Em grupo, voltar ao “Problema dos Camelos”, realizando a operação de adição com as frações da herança, demostrando a solução do problema. • Os alunos devem realizar uma avaliação qualitativa de si próprios, bem como o desempenho e a aprendizagem

	equivalentes para reduzir os denominadores a uma mesma unidade.	durante o experimento de ensino. • Discussão e reflexão sobre as soluções para o “Problema dos Camelos”, bem como a avalição sobre o desempenho e o que compreenderam durante todas as aulas do experimento de ensino.

Fonte: elaborado pela autora

3.2.6 Ação 6: A avaliação da aprendizagem

A sexta ação de aprendizagem consiste em avaliar os alunos, se estes assimilaram ou não “[...] o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem correspondem, ou não, e em que medida, ao objetivo final” (DAVYDOV, 1988, p. 176). Para isso, segundo Freitas (2016), no momento da avaliação, o professor pode se orientar por uma pergunta, por exemplo, se o aluno se apropriou da relação geral do objeto e a aplica em situações particulares.

Dessa forma, para respondermos a nossa questão investigativa, os alunos serão avaliados durante toda a atividade de estudo, por meio da observação da pesquisadora e das respostas dadas pelos alunos para cada tarefa de aprendizagem, buscando verificar se cumpriram as 5 (cinco) ações de aprendizagem elencadas por Davydov (1988), que visam a formação do pensamento teórico.

A seguir, faremos uma contextualização do local onde realizou-se a pesquisa.

3.3 O Colégio: Contextualizando o local da pesquisa

O Colégio situa-se setor Leste Vila Nova, na cidade de Goiânia. Sua categoria escolar abrange o ensino fundamental, do 5º ao 9º ano, e ensino médio, e foi fundado em 02 de dezembro de 1952. Os estudantes do Colégio provém de classe média oriunda do próprio bairro e região circunvizinha.

O Colégio começou a funcionar com 5 (cinco) classes, e atualmente possui:

- 14 (quatorze) salas de aula. 8 (oito) com capacidade para 30 (trinta) alunos e 6 (seis) com capacidade para 40 alunos.
- 1 (uma) cozinha;
- 3 (três) banheiros femininos;
- 3 (três) banheiros masculinos;

- 1 (uma) sala e de vídeo;
- 1 (uma) biblioteca;
- 1 (uma) sala da coordenação pedagógica;
- 1 (uma) sala dos os professores;
- 1 (uma) sala da secretaria;
- 1 (uma) sala da diretoria;
- 1 (um) pátio;
- 1 (uma) quadra de esporte coberta;
- 2 (dois) laboratórios de informática;
- 1 (um) laboratório de Ciências Físicas e Biológicas
- 1 (um) laboratório de Línguas Estrangeiras e Reforço Escolar;
- 1 (uma) sala de jogos;
- 1 (uma) sala de recurso para a educação inclusiva.

O Colégio, hoje, disponibiliza o ensino fundamental e médio no turno matutino, com um total de 433 (quatrocentos e trinta e três) alunos, e no vespertino, com 301 (trezentos e um) alunos. No turno noturno é oferecido o ensino médio, tendo 75 (setenta e cinco) alunos. Quanto aos professores, o Colégio possui um total de 38 (trinta e oito), entre graduados e mestres. Esses dados são referentes ao mês de dezembro de 2019.

Tanto a matriz curricular do ensino médio como a do ensino fundamental, apresentam a carga horaria de 30 horas semanais, sendo distribuídas em 6 aulas diárias de 50 minutos cada, tendo início das 7h e término as 12h:15min, no período matutino; e das 13h às 18h: 15min, no período vespertino.

Segundo o Projeto Político Pedagógico deste Colégio, os estudantes apresentam considerável deficiência na leitura e na escrita, o que implica na falta de condições de acompanhar o currículo mínimo da Rede Estadual. Dessa forma, apesar das medidas pedagógicas estabelecidas para a intervenção, muitos alunos, contribuem para o aumento do índice de dependências e reprovação, o que, segundo a escola, prejudica o índice do IDEB, e outras avaliações propostas pela Rede. Em contrapartida, a escola afirma que ao término do 3º ano do ensino médio, os alunos estarão capacitados para concorrerem ao vestibular, conseguindo ser aprovados em Universidades conceituadas do Estados, e em concursos.

Por fim, ainda segundo o Projeto Político Pedagógico do Colégio, este possui como propósito a busca do desenvolvimento do aluno, por meio de atividades geradoras de situações de aprendizagem reais e diversificadas, consequentemente, a melhoria da qualidade de ensino, permitindo assim a formação intelectual, social e moral do educando para o exercício da cidadania, o que vai ao encontro com a proposta desta pesquisa.

4 O EXPERIMENTO DE ENSINO: DESCRIÇÃO E ANÁLISE

O experimento de ensino foi proposto buscando intervir no processo de ensino do conceito de adição de fração, contribuindo para a formação do pensamento teórico do aluno e, com isso, responder a nossa questão de investigação.

Assim, utilizamos como instrumentos de coleta de dados:

- Um questionário misto, a fim de obter um diagnóstico inicial dos participantes (Apêndice C);
- As tarefas de aprendizagem que compõem o experimento de ensino (Apêndice A);
- Um roteiro de observação, elaborado de acordo com Peres (2010), que constitui-se na observação direta da pesquisadora no contexto da sala de aula e nas ações de aprendizagem dos alunos, sendo registrada por meio de diário de campo.

Portanto, o quadro 7, traz com mais detalhes o roteiro de observação de acordo com Peres (2010):

Quadro 7 – Roteiro de observação de acordo com Peres (2010)

CONTEXTO DA SALA DE AULA	AÇÕES DE APRENDIZAGEM DOS ALUNOS
Relacionamento entre: alunos/alunos; professor/aluno e aluno/escola.	Participação ativa dos alunos durante a atividade de estudo.
Comportamento durante as tarefas de aprendizagem, seja com relação a atenção, cumprimento de regras, respeito entre os alunos, polidez, gentileza etc.	Motivação e desmotivação durante a atividade de estudo.
Levantamento de temas do seu contexto durante a atividade de estudo.	Comentários favoráveis e desfavoráveis em relação ao conteúdo e sua aprendizagem.
Exposição sobre a sua experiência com o conteúdo, abordagem de fatos sobre o seu contexto sociocultural, seu conhecimento cotidiano.	Formulação de perguntas, exposição de pensamento, discussão com a pesquisadora e colegas.
Liderança de grupos ou alunos.	Capacidade de realizar as tarefas de aprendizagem conforme explicado pela pesquisadora.
Relação entre os grupos, seja em: disputa, exclusão; individualismo; solidariedade, compartilhamento e colaboração.	Capacidade de associar os conteúdos com o seu contexto e cotidiano.
Presença das condições necessárias para a aula.	Associação do conteúdo com outros que conhece, capacidade de análise, e desenvolvimento de ações mentais sobre o conteúdo.

Fonte: elaborado pela autora.

Como forma de organização dos dados, estabelecemos categorias de análise que emergem da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental: formação de conceitos (pensamento teórico/pensamento empírico), zona de desenvolvimento proximal, comunicação compartilhada/interação, mediação e atividade de estudo.

Diante disso, faremos a seguir:

- A descrição e a análise do questionário misto aplicado inicialmente aos alunos;
- A descrição da aplicação das tarefas de aprendizagem, que compõem o experimento de ensino, bem como a sua análise.

4.1 Os sujeitos da pesquisa e o diagnóstico do ensino e da aprendizagem

O experimento de ensino iniciou no dia 12/11/2019 com a entrega do questionário (Apêndice C) aos alunos da turma do 6º ano do ensino fundamental, do Colégio Estadual Murilo Braga. Assim, tive como objetivo conhecer os participantes da pesquisa, analisar o ensino de matemática pela visão dos alunos e realizar um diagnóstico da aprendizagem do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, e os demais conceitos que o envolve, como, o conceito de fração, comparação de fração, representação de fração e a equivalência entre frações. Dessa forma, com os dados obtidos com o questionário, pretendíamos criar subsídios para a atuação da pesquisadora na zona de desenvolvimento proximal do aluno, contribuindo para a formação de novas ações mentais acerca do conceito de adição de fração.

Diante disso, a aplicação do questionário foi o primeiro encontro com os alunos da turma de 6º ano, e durou cerca de 50 (cinquenta) minutos, que é o tempo de 1 (uma) aula. Especificamente, antes da entrega do questionário, a pesquisadora se apresentou e explicou a importância em respondê-lo, pois se tratava de uma pesquisa do Programa de Pós-graduação em Educação para Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Goiás.

Inicialmente, a primeira impressão da pesquisadora ao entrar no ambiente de ensino, foi de que seria muito difícil, posteriormente, motivar os alunos a entrar em atividade de estudo. Isso se deve ao fato de que estes estavam inquietos, correndo de um lado para o outro dentro da sala de aula e abordando assuntos aleatórios uns com os outros como algo de muita importância e inadiável.

Neste momento, a pesquisadora se recordou da afirmação de Freitas e Rosa (2015, p. 622) que mencionam que “a tarefa proposta pelo professor deve conter elementos que possam provocar no aluno a necessidade de estabelecer uma relação com o novo objeto a ser conhecido, seja por sua forma de desafio ou de problema a ser solucionado”. Diante dessa afirmação e da realidade a qual a pesquisadora estava inserida, começou a surgir a seguinte indagação: as tarefas de aprendizagem, elaboradas anteriormente pela pesquisadora, contém elementos suficientes que motivarão os alunos a entrar em atividade de estudo e sentir a necessidade de resolver o problema que será proposto a eles no próximo encontro? Essa pergunta seria respondida mais tarde.

Em seguida, em meio a essa realidade, a pesquisadora conseguiu a atenção dos alunos por meio da intervenção da coordenadora pedagógica, possibilitando, posteriormente, a sua apresentação e o motivo de sua presença.

Assim, tendo a atenção dos alunos, estes observaram o questionário que estava nas mãos da pesquisadora e começaram a dizer: “isso é prova?”, “vale quanto?”, “é de pesquisa?”, “mas eu nem estudei”, “eu vou tirar zero”.

Analisando essas falas, podemos considerar que a percepção desses estudantes é de que “uma boa nota” é sinônimo de aprendizagem e que a avaliação é um teste que comprova o conhecimento e não uma ferramenta que visa contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Diante disso, questiona-se: O que contribui para que o aluno tenha essa visão acerca da avaliação? Será que essa visão é resultado da transmissão de um entendimento equivocado que se tem da avaliação? Ou melhor, será que o professor colabora para essa compreensão do aluno acerca da avaliação? Como o professor compreende a avaliação? Como um teste que comprova o conhecimento? Ou como uma ferramenta que pode contribuir para a ressignificação de sua prática, para o planejamento do ensino, para a escolha de outros caminhos que buscam levar o aluno a apropriação do conteúdo?

Contudo, não nos adentraremos neste assunto, pois foge do nosso objetivo de pesquisa. Entretanto, consideramos que este acontecimento foi de grande valia, abrindo leque para outras possibilidades de pesquisa, tendo a avaliação como objeto de investigação.

Prosseguindo, após a apresentação da pesquisadora e dos motivos da pesquisa, os questionários foram entregues aos alunos. Durante a aplicação, vários apontamentos chamaram a atenção da pesquisadora como, por exemplo, “Eu não gosto de matemática”, “Matemática não tem sentido nenhum”, “Nós acabamos de estudar fração e eu não sei o que é”, “Eu vou tirar um zero nisso aqui”, “A única coisa que eu sei aqui é o meu nome”.

Ao analisarmos essas falas podemos verificar que os alunos já tiveram contato com as frações, entretanto, não se apropriaram desse conhecimento. Além disso, percebemos a consideração da falta de sentido na matemática, o que se subentende que o seu ensino pode estar sendo apresentado de maneira tradicional à esses alunos, ou seja, não colocando-os na centralidade do processo de ensino e aprendizagem em busca dos significados, da essência do objeto. Dessa forma, segundo Carvalho (2017, p. 13), sobre a falta da compreensão de frações:

> A origem dessa situação pode estar relacionada à maneira com que esse assunto é abordado, haja vista que os professores que trabalham esse conteúdo algumas vezes não o dominam ou não trabalham todos os significados de fração de uma forma a colocar o estudante na centralidade do processo de ensino e aprendizagem (CARVALHO, 2013, p. 13).

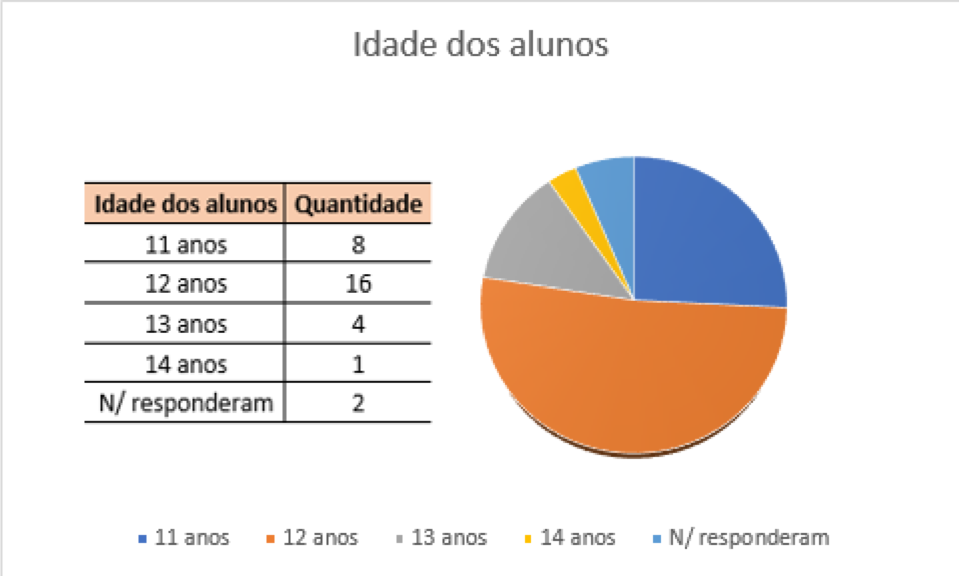
Outro ponto que é interessante destacar, durante a aplicação, é a dependência do aluno para com a pesquisadora em relação a resolução das questões contidas no questionário. Assim, diziam: “Professora vem me ajudar”, “Eu não consigo escrever o que é fração, me ajuda”, “Professora senta aqui do meu lado e diz como somar as frações”. Diante disso, foi orientado que não haveria nenhuma intervenção e, novamente, foi explicado que o questionário foi proposto objetivando obter uma avaliação diagnóstica da aprendizagem.

Diante do exposto, faremos, a seguir, uma análise das respostas referentes as questões do questionário, onde 31 (trinta e um) alunos o responderam individualmente. Assim, a análise foi dividida em 3 (três) momentos:

- A análise da faixa etária dos estudantes e a composição por sexo;
- A análise do ensino de matemática pela visão dos alunos;
- Diagnóstico da aprendizagem do conceito de adição de fração com denominadores diferentes e de outros conceitos que o envolve, como, o conceito de fração, comparação de fração, representação de fração e a equivalência entre frações.

Em relação ao **primeiro momento**, a figura 34 traz um gráfico sobre a faixa etária dos alunos:

Figura 34 - Idade dos alunos



Fonte: elaborado pela autora.

Com esses dados percebemos que a maioria, sendo 16 (dezesseis) alunos possuem 12 (doze) anos de idade. Em segundo lugar temos 8 (oito) alunos com 11 (onze) anos de idade. Em terceiro lugar temos 4 (alunos) com 13 (treze) anos de idade e, por fim, em quarto lugar temos 1 (um) aluno com 14 (quatorze) anos de idade.

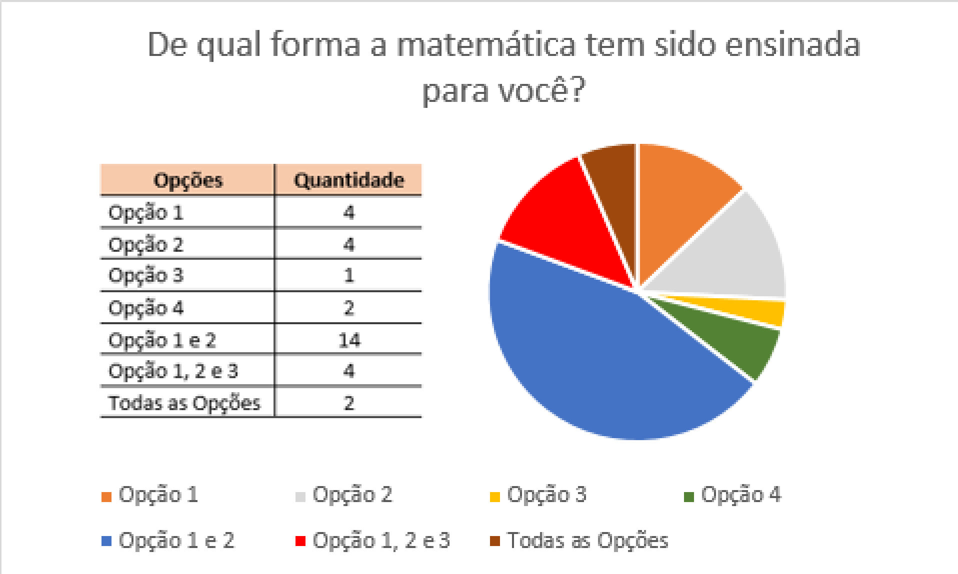
Esses dados mostram que os sujeitos da pesquisa estão na fase da adolescência. Assim, de acordo com Martins (2016) e também de acordo com Braga e Dias (2019), os sujeitos conseguem pensar conceitualmente, tanto conceitos em sua forma espontânea (experiência prática da criança em seu meio) quanto em sua forma científica (adquiridos nas interações escolarizadas).

Sobre a composição dos alunos por sexo, é possível verificar que 14 (quatorze) alunos são do sexo feminino e 17 (dezessete) são do sexo masculino. Dessa forma, o número de alunos é maior que o número de alunas, entretanto, percebemos que a turma do 6º ano está bem dividida sendo 14 (quatorze) do sexo feminino e 17 (dezessete) do sexo masculino.

Em relação ao **segundo momento**, temos 3 (três) perguntas fechadas e 1 (uma) questão aberta, com o objetivo de analisar o ensino da matemática para com os alunos do 6º ano do ensino fundamental.

A primeira pergunta tem como propósito verificar de qual forma que a matemática tem sido ensinada para os alunos, sendo as opções: (1) a resolução de exercícios no quadro pela professora, onde são transcritos para o caderno; (2) a resolução de exercícios do livro didático, onde são transcritos para o caderno; (3) o ensino de matemática por meio de jogos, material concreto, ou (4) outra forma de ensino. Assim, na figura 35 temos:

Figura 35 - De qual forma a matemática tem sido ensinada para você?



Opções	Quantidade
Opção 1	4
Opção 2	4
Opção 3	1
Opção 4	2
Opção 1 e 2	14
Opção 1, 2 e 3	4
Todas as Opções	2

Fonte: elaborado pela autora.

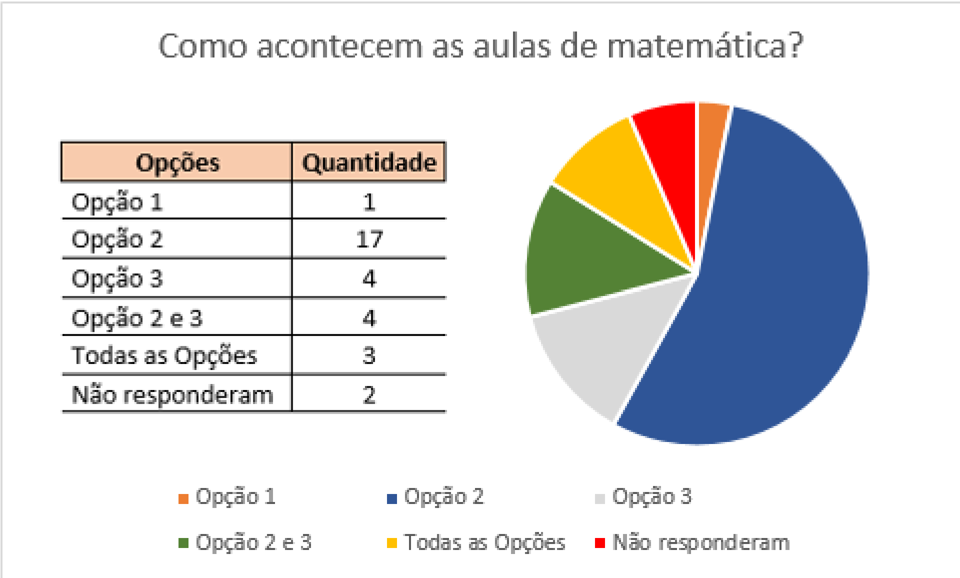
Diante dos dados contidos na figura 35, percebemos que as aulas de matemática se baseiam principalmente na resolução de exercícios no quadro pela professora, e na resolução de exercícios do livro didático, onde estes são transcritos para o caderno do aluno. Além disso, recursos como os jogos e material concreto é pouco utilizado para o ensino de matemática. Também é possível perceber que os alunos afirmaram que são utilizadas outras formas de ensino, entretanto, não as especificaram.

Esses dados indicam a predominância do ensino tradicional nas aulas de matemática. Assim, segundo Carvalho (2013, p. 47),

> A perspectiva chamada "tradicional" atribui aos professores o papel de transmissores únicos de conhecimentos, enquanto os alunos devem interiorizar o conhecimento tal como lhe é apresentado. Esta é uma concepção de que a aprendizagem consiste na reprodução da informação (CARVALHO, 2013, p. 47).

A segunda pergunta tem como propósito verificar como acontecem as aulas de matemática, sendo aulas: (1) expositivas, (2) dialogadas, (3) relacionadas ao cotidiano, ou (4) outra forma. Assim, na figura 36 temos:

Figura 36 - Como acontecem as aulas de matemática?



Fonte: elaborado pela autora.

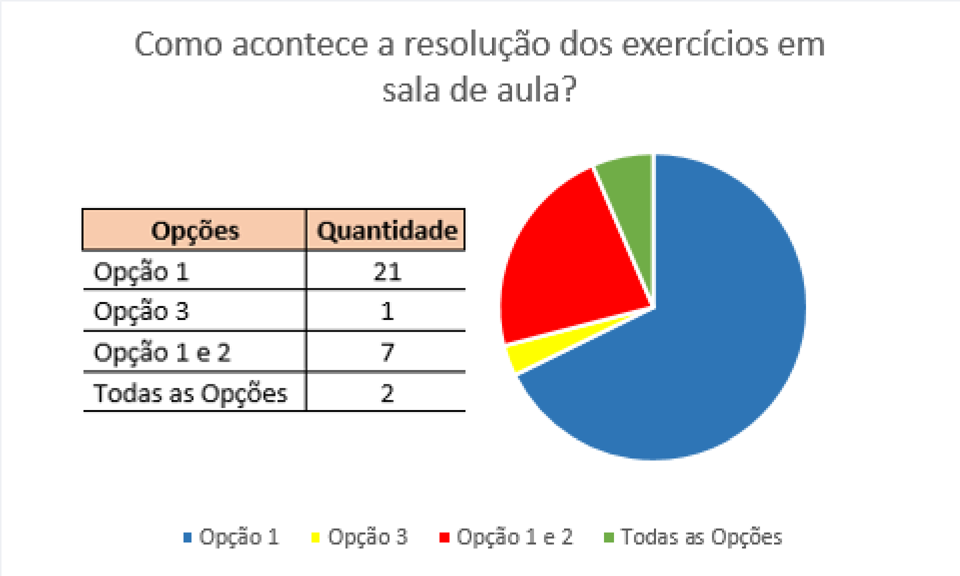
Diante dos dados expostos na figura 36, é possível perceber que há a predominância de aulas dialogadas, onde a professora expõe o conteúdo e interage com os alunos. Além disso, podemos constatar que há poucas relações da matemática com o cotidiano. Também é possível perceber que as aulas acontecem de outras formas, entretanto, não foi especificado.

Relacionando os dados obtidos com a primeira e a segunda questão do questionário, consideramos que, mesmo os conteúdos sendo apresentados por um viés tradicional, as aulas são dialogadas e há uma interação entre a professora e os alunos. Entretanto, com os dados da segunda questão, contata-se que são poucos os diálogos que objetivam levar o aluno a perceber a matemática em seu cotidiano, o que pode indicar que há uma abordagem limitada apenas as abstrações dos conteúdos.

Isso pode indicar que os alunos não estão sendo motivados a pensar teoricamente, ou seja, a pensar o objeto, também, em seu aspecto particular. Dessa forma, segundo Freitas e Limonta (2012), pensar teoricamente é quando a criança interioriza um conceito e o aplica em seu cotidiano. Para isso, o conteúdo deve ser ensinado, além de sua forma sistematizada e organizada, em sua forma contextualizada que, segundo os dados, é pouco debatido pela professora.

A terceira pergunta tem como objetivo verificar como acontece a resolução dos exercícios em sala de aula, sendo de forma: (1) individual, (2) em dupla, (3) em grupos pequenos, ou (4) outra forma. Assim, na figura 37 temos:

Figura 37 - Como acontece a resolução dos exercícios em sala de aula?



Fonte: elaborado pela autora.

Ao analisarmos os dados contidos na figura 37, percebemos que a resolução dos exercícios acontece individualmente e há poucos indícios de atividades em dupla ou em grupos pequenos. Também é possível constatar que a resolução das tarefas propostas pela professora acontece de outras formas, entretanto, não foi especificado.

Diante disso, recorremos ao nosso referencial teórico a fim de compreendermos a importância da resolução de tarefas de aprendizagem em dupla ou em grupos pequenos. Assim, Segundo Oliveira (1997), é importante realizar atividades em grupos porque as crianças são sempre heterogêneas. Dessa forma, a criança como maior conhecimento dentro do grupo pode atuar na zona de desenvolvimento proximal das outras por meio da troca de experiências, contribuindo para o amadurecimento das funções que se encontram em seu estado embrionário.

Portanto, como pode-se constatar, a atividade em grupo é pouco abordada pela professora no processo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, o experimento de ensino aqui proposto, foi desenvolvido em grupos de 4 (quatro) e 5 (cinco) alunos, objetivando a troca de experiências entre os membros, contribuindo para o amadurecimento das funções embrionárias localizadas na zona de desenvolvimento proximal dos alunos.

Prosseguindo, a quarta pergunta tem como objetivo analisar, de acordo com a compreensão dos alunos, qual é a importância de se estudar matemática. Assim, ao analisarmos os dados, é possível eleger três categorias:

- A matemática é importante para aplicá-la em situações do cotidiano (categoria 1);

- A matemática é importante para aprender sobre um conteúdo específico dentro da própria matemática (categoria 2);
- A matemática é importante para aplicar um conteúdo específico de matemática em situações do cotidiano (categoria 3).

No quadro 8, traremos algumas respostas dos alunos de acordo com cada categoria.

Quadro 8 – Por que é importante estudar matemática para você?

CATEGORIA 1	CATEGORIA 2	CATEGORIA 3
"A matemática é importante para mim, pois ela está presente no meu cotidiano"	"Porque a matemática ajuda a resolver todas as continhas"	"Porque no futuro eu vou precisar muito e também no dia a dia com o dinheiro, com a quantidade e dividir"
"Porque tudo tem matemática, exemplos: quando vai fazer compras, quando vai ao restaurante"	"Porque aprendemos dividir, multiplicar, somar, subtrair e armar contas"	"É importante porque nós precisamos aprender contas de somar e subtrair para também conhecer o dinheiro"
"Porque matemática é tudo, é dirigir, jogar"	"É importante estudar matemática para mim e eu aprendo as contas e quando alguém me pergunta as contas eu sei responder"	"Para aprender sobre números, e assim aprender sobre o cotidiano, porque em tudo tem números e fica fácil compreender por exemplo quando vai fazer um bolo a gente precisa saber quantidades"
"Porque você vai precisar da matemática para quase tudo nessa vida, até para fazer compras"	"Porque a gente aprende, a professora ajuda, explica pra gente entender as contas e a gente desenvolve"	"Porque eu quero aprender para estar bem informada sobre todos os conteúdos da matemática e quem sabe através da matemática ter um futuro melhor"

Fonte: elaborado pela autora.

Os dados mostram que os alunos, ao serem questionados sobre a importância da matemática, apresentam compreensões distintas que se dividem em três categorias: a matemática é importante para aplicá-la em situações do cotidiano; a matemática é importante para aprender sobre um conteúdo específico dentro da própria matemática, por fim, a matemática é importante para aplicar um conteúdo específico de matemática em situações do cotidiano.

A primeira categoria está relacionada com a aplicação da matemática no cotidiano que, segundos os alunos, pode ser encontrada ao se fazer compras, ao dirigir, ao jogar e, também, quando se vai a um restaurante.

A segunda categoria mostra que a importância da matemática está no aprender sobre os conteúdos de matemática e em conseguir responder corretamente os cálculos.

Já a terceira categoria, é possível perceber que há uma especificação de qual conteúdo de matemática possui relação com alguma situação do cotidiano. Dessa forma, vemos que há a relação das operações de adição e subtração com o dinheiro, a relação das quantidades na produção de um bolo e, por fim, a relação da aprendizagem dos conteúdos de matemática com a promoção de um futuro melhor.

Portanto, ao analisar os dados é possível evidenciar a presença dos conceitos espontâneos em relação a matemática, que são, tal como menciona Rego (1995, p. 77), "[...] àqueles conceitos construídos a partir da observação, manipulação e vivência direta da criança". Assim, segundo o nosso referencial teórico, Gebert (2019), esses conceitos formulados no dia-a-dia do sujeito devem ser levados em consideração pelo educador, uma vez que a conexão da criança com o conceito científico é desencadeada pelos conceitos espontâneos (GEBERT, 2019), que é o que buscamos abarcar, posteriormente, no experimento de ensino.

Outro ponto importante a ser destacado, especificamente na categoria 2, é a percepção da matemática como uma reprodução de cálculos que, posteriormente, devem repassados ao professor de maneira idêntica ao que foi transmitido. Isso nos faz lembrar de Moretto (2008, p, 86), ao escrever sobre o ensino tradicional, onde "[...] o aprender tem sido visto como gravar informações transcritas para um caderno (cultura cadernal) para devolvê-las da forma mais fiel possível ao professor na hora da prova".

Prosseguindo com a análise, o **terceiro momento** do questionário tem como objetivo realizar um diagnóstico da aprendizagem do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, e os demais conceitos que o envolve, como, o conceito de fração, comparação de fração, representação de fração e a equivalência entre frações.

Dessa forma, para o diagnóstico da aprendizagem, foram elaboradas 6 (seis) questões, cujo objetivo é que os alunos:

- Questão 1, item a, b, c: Escrevam a fração que corresponde a figura;
- Questão 2, item a, b, c: Comparem as frações;
- Questão 3, item a, b, c, d: Determinem as frações equivalentes;
- Questão 4, item a, b, c, d: Somem as frações com denominadores iguais e diferentes;
- Questão 5, item a: Somem as frações com denominadores iguais;
- Questão 5, item b: Relacionem as frações com um inteiro;
- Questão 6: Expliquem o que é fração.

Para se ter uma referência, a análise das questões de 1 (um) a 5 (cinco) se deu de forma quantitativa. Assim, para essa análise, foi atribuído um valor total de 10,0 (dez) pontos que foram divididos da seguinte maneira:

- Questão 1: Valia 1,5 (um virgula cinco) pontos, distribuídos a cada item resultando no valor de 0,5 (zero vírgula cinco) pontos;
- Questão 2: Valia 1,5 (um vírgula cinco) pontos, distribuídos a cada item resultando no valor de 0,5 (zero vírgula cinco) pontos;
- Questão 3: Valia 2,0 (dois) pontos, distribuídos a cada item resultando no valor de 0,5 (zero vírgula cinco) pontos;
- Questão 4: Valia 2,0 (dois) pontos, distribuídos a cada item resultando no valor de 0,5 (zero vírgula cinco) pontos;
- Questão 5: Valia 3,0 (três) pontos, distribuídos a cada item resultando no valor de 1,5 (um vírgula cinco) pontos.

Diante disso, ao se realizar a média de acertos, que foi o equivalente a 34,67 (trinta e quatro virgula sessenta e sete), constatou-se um baixo desempenho dos alunos, tal como mostra o quadro 9:

Quadro 9 – Resultado da avaliação diagnóstica da aprendizagem

Número do aluno	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Média
1	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,5
2	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	2,0
3	0,0	0,5	0,0	1,0	1,5	3,0
4	0,0	0,5	0,0	1,0	0,0	1,5
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0
7	0,0	0,5	0,0	0,0	3,0	3,5
8	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0
9	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0
10	0,0	1,0	0,5	0,0	0,0	1,5
11	0,0	1,0	0,0	1,0	3,0	5,0
12	0,0	1,0	1,0	0,5	3,0	4,0
13	1,5	1,0	0,0	1,5	3,0	7,0
14	1,5	1,0	0,0	1,5	3,0	7,0
15	1,5	1,0	0,0	0,5	3,0	6,0
16	1,5	0,0	0,0	0,0	0,0	1,5
17	1,5	0,5	0,0	1,0	0,0	3,0
18	1,5	1,0	0,0	1,0	3,0	6,5
19	1,5	1,0	0,0	1,0	1,5	5,0
20	1,5	1,0	0,0	1,0	3,0	6,5
21	1,5	0,0	0,0	1,0	1,5	4,0

22	1,5	1,0	0,0	1,0	3,0	6,5
23	1,5	0,5	0,0	1,0	0,0	3,0
24	1,5	1,0	0,0	0,0	1,5	4,0
25	1,5	1,0	0,0	0,0	0,0	2,5
26	1,5	1,0	0,0	0,0	0,0	2,5
27	1,5	0,5	0,0	1,0	3,0	6,0
28	1,5	0,5	0,0	1,0	3,0	6,0
29	1,5	0,5	0,0	0,0	0,0	2,0
30	1,0	1,0	0,0	0,0	1,5	3,5
31	0,5	0,5	0,0	0,0	0,0	1,0
Média total	**0,82**	**0,7**	**0,06**	**0,58**	**1,3**	**34,67**

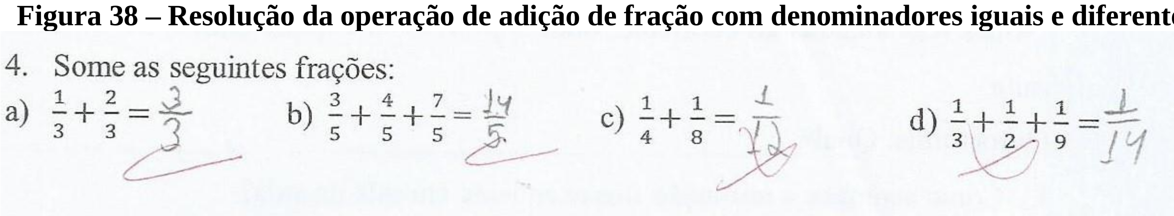
Fonte: elaborado pela autora.

No geral, agora, por meio de uma análise qualitativa dos dados, constatou-se, principalmente, uma grande dificuldade em relação a equivalência de frações e a adição de fração com denominadores diferentes.

Especificamente, ao determinar a fração equivalente, os numeradores e os denominadores das frações eram nomeados. Por exemplo, a fração equivalente a $\frac{2}{4}$ pode ser a fração $\frac{1}{2}$, entretanto, os alunos responderam "dois quartos".

Em seguida, outra dificuldade apresenta está na adição de fração com denominadores diferentes, cujos os denominadores eram somados. Por exemplo, a adição $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ tinha como resultado a fração $\frac{1}{12}$. Em contrapartida, os alunos demonstraram facilidade na adição de fração com denominadores iguais, considerando o denominador e somando apenas os numeradores. A figura 38 mostra essa duas situações:

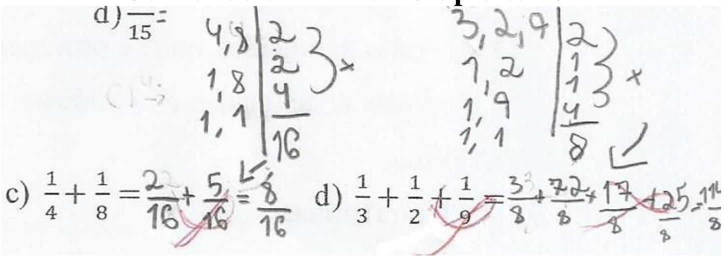
Figura 38 – Resolução da operação de adição de fração com denominadores iguais e diferentes



Fonte: acervo da pesquisa

Além disso, 2 (dois) alunos utilizaram o *mínimo múltiplo comum* para realizar a adição de fração com denominadores diferentes, entretanto, não apresentaram resultados corretos. A figura 39 traz a resposta de um dos alunos:

Figura 39 – Resolução da operação de adição de fração com denominadores diferentes utilizando o mínimo múltiplo comum



Fonte: acervo da pesquisa

Além da adição de fração com denominadores iguais, que se destaca como uma facilidade apresentada pelos alunos, a determinação da fração que representa a figura dada nos itens da primeira questão da avaliação também é evidenciada. Assim verificou-se que mais da metade, sendo um total de 16 (dezesseis) alunos, responderam corretamente a essa questão. Já os outros alunos, sendo um total de 14 (quatorze), ou não responderam a questão ou responderam um ou dois itens corretamente.

Por outro lado, uma outra dificuldade de compreensão que os alunos demonstraram é o fato de relacionar a fração com um inteiro. Especificamente, na quinta questão, era preciso realizar uma operação de adição de frações com denominadores diferentes e verificar se o seu resultado representa um inteiro. Dessa forma constatou-se que as frações foram somadas corretamente, entretanto, houve dificuldade em relacionar o resultado com um inteiro.

Por exemplo, a adição $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ teve como resultado a fração $\frac{4}{5}$, o que está correto. A dificuldade apresentada foi que os alunos não conseguiram explicar que a fração $\frac{4}{5}$ não representa um inteiro. Diante disso, apenas 11 (onze) alunos responderam a essa questão, ou seja, menos da metade da turma.

Outro ponto importante a destacar, que se apresenta como uma dificuldade encontrada, é com relação a comparação de fração, onde é possível verificar que nenhum dos alunos acertaram todos os itens da questão. Entretanto, 27 (vinte e sete) alunos responderam corretamente um ou dois itens.

Portanto, os dados mostram que a maior dificuldade é em relação a adição de fração com denominadores diferentes, cuja dificuldade está em perceber que não se pode somar os denominadores, mas sim encontrar frações que sejam equivalentes para posteriormente realizar a adição. Além disso, outra dificuldade encontrada está no fato de nomear os denominadores e numeradores de uma fração ao invés de determinar a sua fração equivalente.

Por fim, a sexta questão da avaliação diagnóstica tem como objetivo analisar qual é a percepção que os alunos possuem em relação ao conceito de fração. Assim, ao analisarmos os dados, é possível eleger duas categorias:

- Fração como parte de um todo (categoria 1);
- Fração como divisão (categoria 2).

No quadro 10, traremos algumas respostas dos alunos de acordo com cada categoria.

Quadro 10 – Explique a sua compreensão sobre o conceito de fração

CATEGORIA 1	CATEGORIA 2
"Fração para mim é parte de alguma coisa"	"Fração é uma divisão entre o numerador e denominador"
"São números que representam o inteiro e as partes da fração"	"Fração é uma divisão"
"Uma pizza tem 5 pedaços, ela comeu $\frac{1}{5}$ e ele $\frac{3}{5}$ então não comeram todos os pedaços"	"Uma fração é uma coisa usada para fazermos divisões"

Fonte: elaborado pela autora.

Com esses relatos, percebe-se uma predominância do pensamento empírico quanto ao conceito de fração. Assim, esses estudantes compreendem as frações como parte de um todo e como uma divisão, expressando, portanto, um conceito ligado à lógica formal.

Em geral, diante desse diagnóstico, pode ser considerado que há uma dificuldade em avançar com o processo de ensino e aprendizagem de forma a desenvolver o pensamento teórico, permanecendo apenas no campo empírico, tal como aponta Davydov (1988, p. 45): "[...] o sistema educacional, da forma com que tem se desenvolvido até o momento, não está conseguindo obter uma solução adequadamente eficaz para alguns importantes problemas ligados a esta tarefa social".

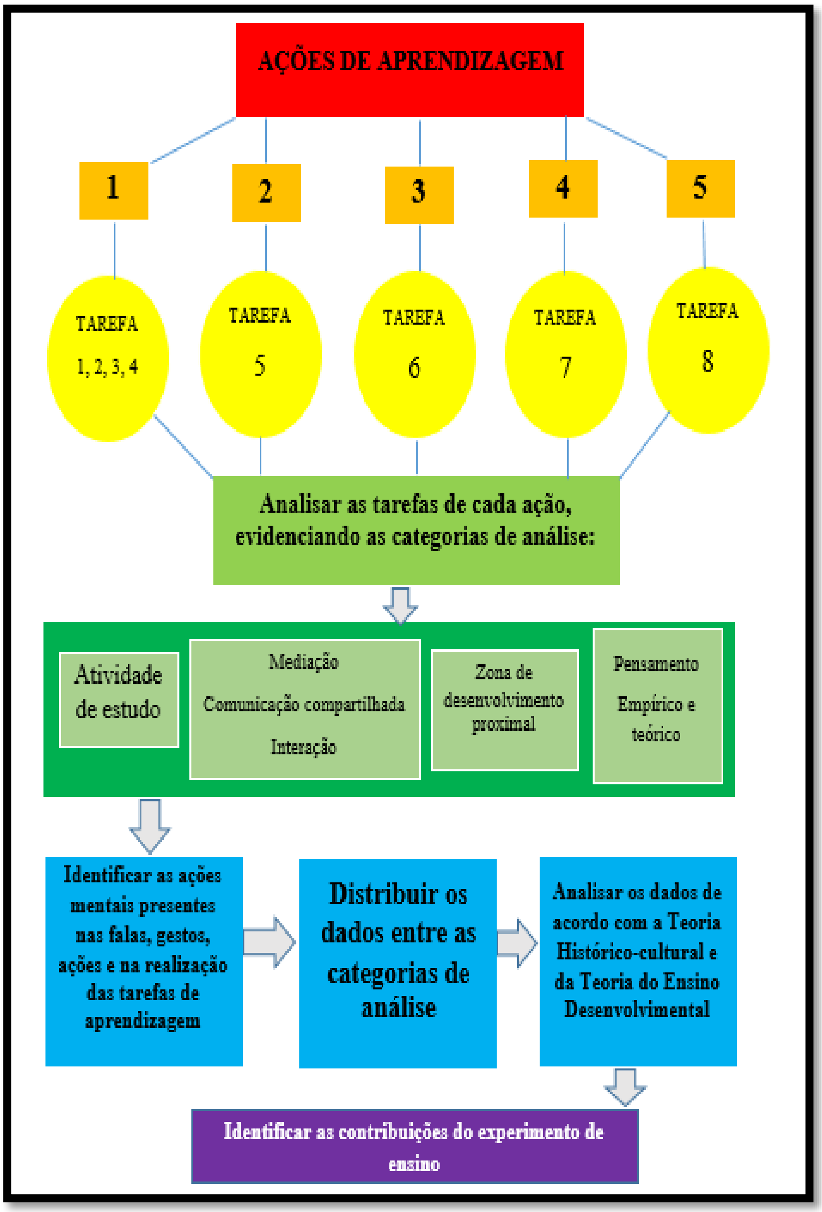
Portanto, a seguir, será realizada a descrição e a análise do experimento de ensino aplicado aos alunos da turma de 6º ano. Sendo assim, é importante frisar que a professora da turma não participou do planejamento do experimento de ensino por motivo de tempo, devido as muitas atividades que devem ser realizadas ao longo do dia para com o Colégio em que trabalha. Em contrapartida, após a elaboração do experimento de ensino pela pesquisadora, este foi apresentado à professora que, logo em seguida, concordou com as tarefas de aprendizagem planejadas. Por fim, a professora mencionou que iria permanecer dentro da sala de aula no momento da aplicação do experimento de ensino, entretanto, não iria intervir, deixando livre espaço para a mediação da pesquisadora.

4.2 Sujeitos em atividade de estudo: descrição e análise

Neste subcapítulo será analisado o experimento de ensino sobre o conceito de adição de fração, realizado com os estudantes do 6º ano do ensino fundamental, a partir dos aportes teóricos da organização da atividade de estudo na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov.

A figura 40, a seguir, ilustra a organização da análise dos dados:

Figura 40 - Organização da análise dos dados



Fonte: elaborado pela autora

Para a discussão dos resultados do experimento de ensino, será analisada cada tarefa das 5 (cinco) ações de aprendizagem que objetivam a formação do pensamento teórico, segundo Davydov (1988). Dessa forma, será dada evidência as categorias de análise, definidas a priori, que emergem da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Teoria Histórico-cultural: Atividade de estudo, mediação/comunicação compartilhada/interação, pensamento empírico/pensamento teórico e zona de desenvolvimento proximal. Dessa forma, será distribuído, entre as categorias, os dados obtidos a partir das falas, gestos, ações e tarefa de aprendizagem dos estudantes. Os dados serão analisados conforme os pressupostos da Teria do Ensino Desenvolvimental e da Teoria Histórico-cultural, buscando identificar, por fim, as contribuições do experimento de ensino.

Cada ação de aprendizagem possui tarefas que objetivam a apropriação do que chamaremos de unidades conceituais. Dessa forma, tomaremos a unidade conceitual de equivalência de frações para apropriação da essência da unidade conceitual de adição de fração com denominadores diferentes, a unidade conceitual noção de inteiro, para a apropriação da unidade conceitual de adição de fração com denominadores iguais, e por fim, a unidade conceitual conceito de fração, objetivando estabelecer um modelo para a relação geral do objeto de estudo adição de fração.

As unidades conceituais são trabalhadas em todo o experimento de ensino. Assim, o quadro 11 mostra a composição das tarefas e suas ações de aprendizagem, dentro de cada unidade conceitual:

Quadro 11 – Unidades conceituais: Composição das tarefas e suas ações de aprendizagem

Unidades conceituais	Tarefas de aprendizagem	Ações de aprendizagem
Noção de inteiro	Tarefa 2, 4, 7, 8	1, 4, 5
Adição de fração com denominadores iguais	Tarefa 2, 3, 4, 6, 7, 8	1, 3, 4, 5
Equivalência de fração	Tarefa 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5
Adição de fração com denominadores diferentes	Tarefa 1, 4, 6, 7, 8	1, 3, 4, 5
Conceito de fração	Tarefa 5, 7	2, 4

Fonte: elaborado pela autora

A seguir, será realizada a descrição e análise do experimento de ensino.

4.2.1 Tarefa 1: Motivando os alunos a entrarem em atividade de estudo

Aula 1

A primeira aula do experimento de ensino teve início no dia 13/11/2019, com uma duração de 30 (trinta) minutos.

Neste dia, iniciou-se o experimento de ensino, especificamente, na quarta aula, após o recreio dos alunos.

Dessa forma, devido ao recreio, onde os estudantes correram e brincaram, estes estavam mais inquietos comparado ao dia da aplicação do questionário. Devido a isso, experimento de ensino teve início com 20 (vinte) minutos de atraso.

Os alunos não queriam entrar para a sala de aula. Preferiam brincar, correr e pular no pátio da escola. Depois de muita insistência, por parte da coordenadora pedagógica, acabaram cedendo.

Com 20 (vinte) minutos de atraso, a pesquisadora deu início a primeira aula do experimento de ensino dando as boas-vindas aos alunos, o que não foram ouvidas. Em seguida, a pesquisadora pegou em cima da mesa da professora, a atividade impressa contendo a história em quadrinho sobre o "Problema dos Camelos", que seria entregue aos alunos posteriormente.

Nesse momento um dos alunos percebeu a história em quadrinho e disse: "Professora! Nós vamos ler histórias em quadrinhos?". Com isso, todos os 30 (trinta) alunos presentes pararam para observar a atividade impressa que a pesquisadora estava em mãos. Todos ficaram curiosos e motivados em saber do que se tratava a história em quadrinho, confirmando o que diz (BALLADARES, 2014). Dessa forma, novamente, a pesquisadora deu as boas-vindas aos alunos e, desta vez, foram ouvidas.

A pesquisadora, então, inicia a aula convidando-os a participarem ativamente de todas a tarefas que serão propostas. Em seguida pediu aos alunos a formação de 7 (sete) grupos, sendo 5 (cinco) grupos contendo 4 (quatro) integrantes, e 2 (dois) grupos contendo 5 (cinco) integrantes, objetivando a comunicação compartilhada de significados entre os membros, a troca de experiências uns com os outros, primeiro num processo interpsicológico para, posteriormente, em um processo intrapsicológico, tal como menciona Freitas e Limonta (2012).

Após a formação dos grupos, foi entregue a história em quadrinho para todos os integrantes, perguntando quem gostaria de lê-la em voz alta. Todos levantaram a mão afirmando que gostariam de fazer a leitura. Sendo assim, disseram simultaneamente: "Deixa eu professora!", "Eu quero ler!", "Deixa eu ler primeiro". A pesquisadora, então, interviu afirmando que eles deveriam estabelecer entre si algum critério para a leitura de forma que todos os 7 (sete) grupos tivessem a oportunidade de ler.

Enquanto os alunos discutiam entre si, foi colocado, em cima da mesa de cada grupo, um número para identificação. Os números disponibilizados são mostrados na figura 41:

Figura 41 – Números para a identificação dos grupos

Fonte: acervo da pesquisa.

Após a entrega dos números a cada grupo, os alunos mencionaram que haviam decidido a forma com a qual iriam ler a história em quadrinho. Eles afirmaram que a história em quadrinho possui 22 (vinte e dois) quadrinhos e que na sala de aula haviam 7 (sete) grupos. Sendo assim poderiam eleger um representante para cada grupo para fazer a leitura. O único problema é que 22 (vinte e dois) dividido por 7 (sete) não resulta em um valor exato.

A pesquisadora interviu perguntando o que poderia ser feito diante desse problema. Dessa forma, um aluno do grupo 4 (quatro) mencionou que a solução para o problema é que um integrante de um dos grupos poderia ler um quadrinho a mais do que os outros ou dividir a leitura do quadrinho restante entre os 7 (sete) integrantes. Por fim, decidiram que seria melhor os integrantes dos 6 (seis) primeiros grupos lerem 3 (três) quadrinhos e o integrante do sétimo grupo ler 4 (quatro) quadrinhos.

- **Evidenciando a categoria de análise:** atividade de estudo

Diante do exposto até o momento, percebeu-se que possibilitar a autonomia, a tomada de decisão no processo de ensino e aprendizagem, motiva os alunos a buscar o conhecimento, a entrar em atividade de estudo e a trabalhar em grupo.

Após a leitura da história em quadrinho sobre o “Problema dos Camelos”, percebeu-se que esta motivou e desencadeou o desejo, de grande parte dos alunos, para entrar em atividade de estudo. Dessa forma, mencionavam: “Eu preciso descobrir como ele conseguiu fazer isso”, “Como ele deu um camelo e saiu com dois?”, “Deve ter alguma pegadinha por trás desse problema”, “Eu não vou nem dormir hoje até eu descobrir como ele sabia que iria sair com o camelo do amigo dele e um camelo para ele mesmo”.

Essas falas respondem a indagação inicial da pesquisadora, ao se perguntar se seria possível motivar os alunos a entrarem em atividade de estudo, visto a recepção dada por estes no momento da aplicação do questionário. Sendo assim, estes dados confirmam que o “Problema dos Camelos” contribuiu para motivar, grande parte dos alunos, a entrar em atividade de estudo e, assim, resolver o problema.

Poucos alunos demonstraram desinteresse em solucionar o problema. Mas, para estes, Davydov (1988) diz que a necessidade em aprender sobre um objeto surge no decorrer do processo de aprendizagem. Além disso, Libâneo (2009) menciona que os alunos entram em atividade de estudo se tiverem motivos sociais/individuais para aprender.

Nesse sentido, a pesquisadora associou o “Problema dos Camelos” ao cotidiano dos alunos, perguntando: “É se fossem 35 (trinta e cinco) bicicletas?”, “É se fossem 35 bonecas? Como podemos explicar o problema?”. Essas perguntas foram feitas de acordo com Freitas (2016), que aponta que, para motivar os alunos a entrar em atividade de estudo, o problema precisa partir das experiências dos estudantes.

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>mediação/comunicação compartilhada/interação</u>

Prosseguindo, objetivando refletir sobre o problema, foi perguntado aos alunos como Beremiz Samir realizou a partilha dos camelos. Sendo assim, afirmaram que Beremiz recorreu a divisão. Como essa reposta não era exatamente o que se pretendia ouvir, a pergunta foi realizada de uma outra maneira: “Em qual momento da história, Beremiz Samir, percebeu que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança e qual o conhecimento matemático utilizou para ter a certeza de que não sairia perdendo no final da história?” Diante disso, mesmo lendo novamente a história, não souberam identificar e responder.

Novamente a pesquisadora tenta melhorar a pergunta: “Beremiz Samir, estava viajando com o seu amigo e, de repente, encontra os três irmãos discutindo entre si. Eles estavam discutindo sobre o que?”. Assim, os alunos afirmaram que os irmãos estavam discutindo sobre a herança, pois não sabiam como dividi-la já que um meio, mais um terço, mais um nono, não é um valor exato. Aproveitando essa afirmação a seguinte questão foi levantada pela pesquisadora: **“Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?”** Imediatamente afirmaram que Beremiz Samir somou as frações da herança, logo o conhecimento matemático, segundo os alunos é a “adição de fração”.

Aqui, vemos a importância do processo de mediação/comunicação compartilhada/interação entre professor e aluno, em que o desenvolvimento da atividade mental do sujeito – que, neste caso, é o fato de identificar o objeto de estudo – só foi possível a partir da troca de experiência, confirmando o que diz (Freitas e Limonta, 2012).

***

Em seguida, uma outra questão foi abordada pela pesquisadora: **Como somar as frações da herança?** Alguns alunos disseram que no problema não menciona a forma como as frações foram somadas. Diante disso, foi explicado que a intenção é que eles indiquem alguma forma de somar frações com denominadores diferentes.

Foi solicitado, então, aos grupos, para que reunissem as informações contidas no problema e, posteriormente, as analisassem, tal como menciona Freitas (2016), a fim de indicarem uma forma de realizar a operação de adição com as frações do problema.

Em seguida, alguns minutos após o início da análise, a aula terminou. Sendo assim, foi sugerido aos alunos para que pensassem a respeito do problema e que, na próxima aula, seria dada continuidade aos estudos.

Portanto, percebe-se que a aula não ocorreu conforme o planejado. Houve um atraso de 20 (vinte) minutos o que interferiu no objetivo da aula que era propor, analisar e discutir o problema a fim de desenvolver subsídios para a identificação da relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.

Aula 2

A segunda aula do experimento de ensino aconteceu no dia 14/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 30 alunos.

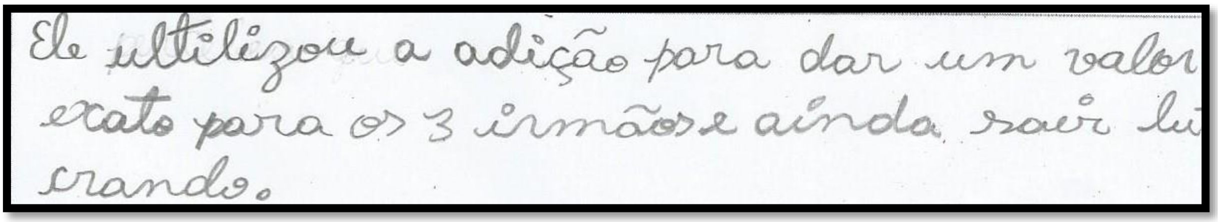
A pesquisadora iniciou a aula dando as boas-vindas e pediu para que formassem novamente os grupos. Assim, enquanto os grupos se formavam, os alunos diziam: “Professora eu fiquei o tempo todo pensando naquele problema”, “Professora, em casa eu tentei retirar os dados do problema mas eu não sei se está certo”, “Hoje eu descubro o que Beremiz Samir fez!”.

Neste segundo dia do experimento de ensino, percebeu-se que os estudantes estavam interessados, não querendo perder sequer um minuto da aula e queriam expressar as suas opiniões acerca do problema apresentado na aula anterior. Em contrapartida, haviam 3 (três) alunos que disseram: “Professora, eu não lembro mais da história”, “Professora, eu não entendi nada, explica de novo”, “Professora, eu não consigo retirar os dados do problema, o que é retirar as informações do problema e analisar?” Diante dessa situação, e já com os grupos formados, a pesquisadora perguntou quem poderia explicar, novamente, o problema para que todos pudessem compreendê-lo.

Um aluno do grupo 3 se prontificou e explicou, aos demais colegas, o “Problema dos Camelos”, dizendo que deveriam explicar como as frações da herança foram somadas, confirmando a Beremiz Samir que realmente poderia juntar o camelo de seu amigo aos camelos que deveriam ser partilhados entre os irmãos. A pesquisadora, então, determinou um tempo de 10 (dez) minutos para os grupos analisarem o problema.

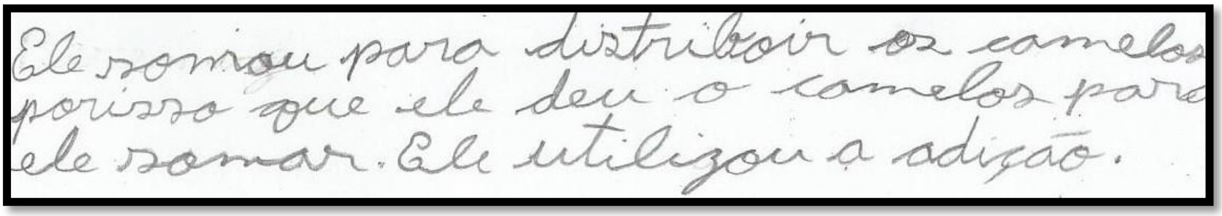
A figura 42 ilustra a análise realizada pelo Grupo 1, e a figura 43 ilustra a análise realizada pelo Grupo 2:

Figura 42 – Análise do Grupo 1 sobre o “Problema dos Camelos”


Ele ultilizou a adição para dar um valor
exato para os 3 irmãos e ainda saír lu
crando.

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 1

Figura 43 – Análise do Grupo 2 sobre o “Problema dos Camelos”

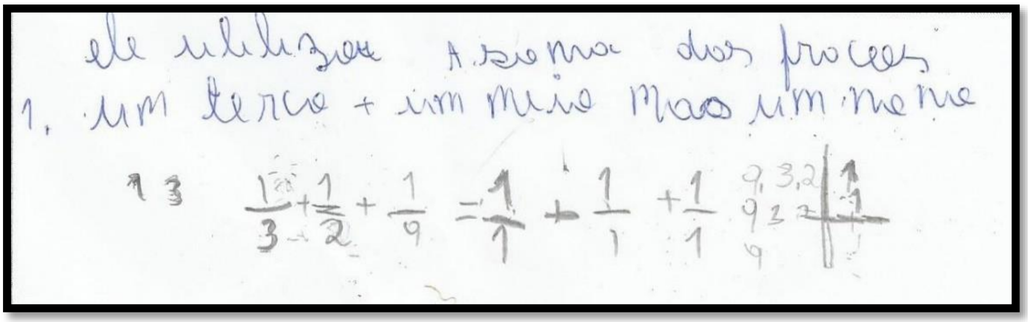

Ele somou para distribuir os camelos
porisso que ele deu o camelos para
ele somar. Ele utilizou a adição.

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 2

Os alunos dos Grupos 1 e 2 mencionaram que o conhecimento matemático que Beremiz Samir utilizou foi a adição, e não explicaram como frações com denominadores diferentes podem ser somadas.

A figura 44 ilustra a análise realizada pelo Grupo 3, e a figura 45 ilustra análise realizada pelo Grupo 4:

Figura 44 – Análise do Grupo 3 sobre o "Problema dos Camelos"

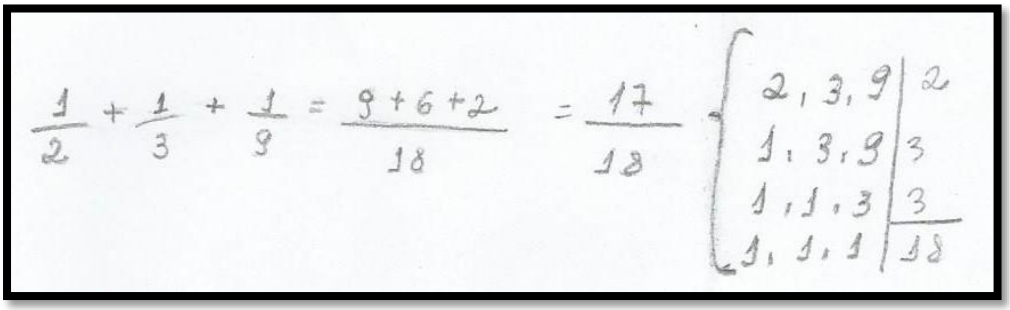


ele utilizou A soma das frações
1. um terço + um meio mas um nono

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}$

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 3

Figura 45 – Análise do Grupo 4 sobre o "Problema dos Camelos"



$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}$

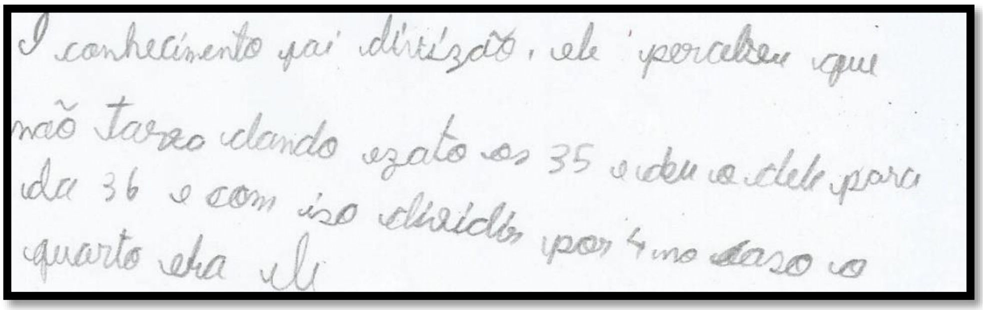
2, 3, 9	2
1, 3, 9	3
1, 1, 3	3
1, 1, 1	18

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 4

Subentende-se que os integrantes dos grupos 3 e 4 compreenderam que a forma de se somar frações com denominadores diferentes é estabelecendo o *mínimo múltiplo comum* dos denominadores das frações. É perceptível, dessa forma, que os estudantes veem a necessidade de encontrar um denominador comum para realizar a operação de adição. Diante disso, com o uso do *mínimo múltiplo comum*, esses alunos expressam os traços externos do objeto, ponto de partida para a identificação da relação geral.

A figura 46 ilustra a análise realizada pelo Grupo 5:

Figura 46 – Análise do Grupo 5 sobre o "Problema dos Camelos"



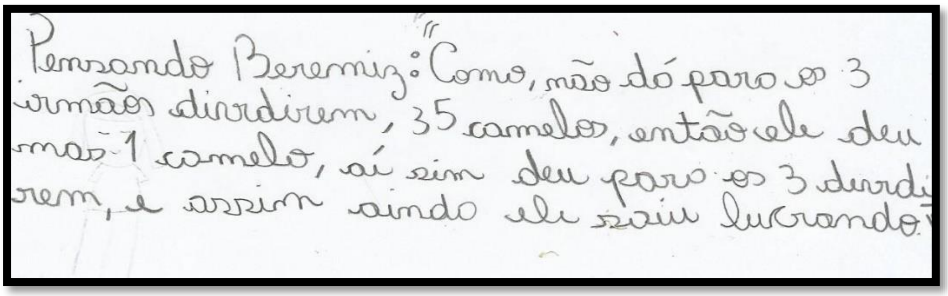
O conhecimento foi dirijido, ele percebeu que
não tava dando ezato os 35 e deu o dele para
da 36 e com iso dividido por 4 no caso o
quarto era ele

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 5

O Grupo 5, mencionou que o conhecimento matemático utilizado por Beremiz Samir foi a divisão. Dessa forma, de acordo com a figura 46, é possível constatar que o grupo não identificou o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes e, por consequência, não explicaram uma forma de somar as frações da herança.

A figura 47 ilustra a análise realizada pelo Grupo 6, e a figura 48 ilustra a análise realizada pelo Grupo 7:

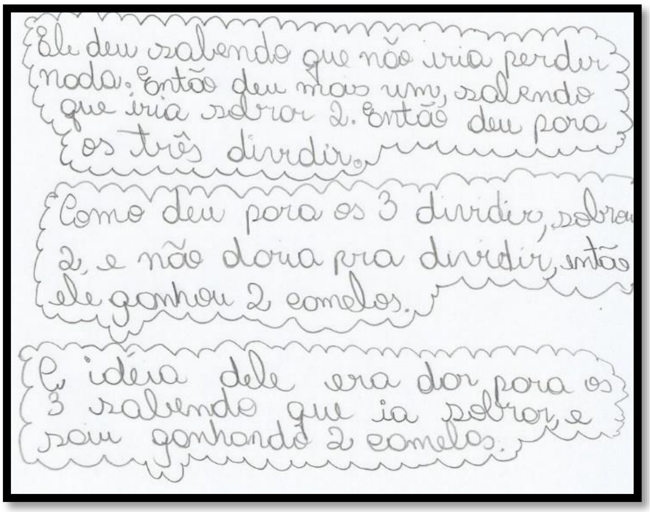
Figura 47 – Análise do Grupo 6 sobre o "Problema dos Camelos"



Pensando Beremiz: Como, não dá para os 3 irmãos dividirem, 35 camelos, então ele deu mais 1 camelo, aí sim deu para os 3 dividirem, e assim ainda ele saiu lucrando.

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 6

Figura 48 – Análise do Grupo 7 sobre o "Problema dos Camelos"



Ele deu sabendo que não iria perder nada. Então deu mais um, sabendo que iria sobrar 2. Então deu para os três dividir.

Como deu para os 3 dividir, sobrou 2, e não dava pra dividir, então ele ganhou 2 camelos.

A ideia dele era dar para os 3 sabendo que ia sobrar, e saiu ganhando 2 camelos.

Fonte: acervo da pesquisa – Grupo 7

Por fim, os Grupos 6 e 7 apenas descreveram a história do "Problema dos Camelos", sem apontar alguma forma de realizar a operação de adição com denominadores diferentes.

- **Evidenciando a categoria de análise** <u>pensamento empírico/pensamento teórico</u>

Depois que os grupos analisaram o problema, a pesquisadora pediu para que os alunos comentassem os seus resultados. O Grupo 4 se prontificou mostrando os seus registros para todos, mencionando que fizeram uso do *mínimo múltiplo comum* dos denominadores para somar as frações. Em contrapartida, não explicaram porque seguiram este caminho, ou seja, qual é o real propósito em obter o *mínimo múltiplo comum* dos denominadores das frações, que é uma regra para adquirir frações equivalentes.

Diante disso, tendo já analisando as respostas contidas no questionário inicial, foi perguntando aos alunos do grupo 4 como que, agora, conseguiram aplicar corretamente a regra do *mínimo múltiplo comum* para somar as frações. Sendo assim, afirmaram que, como estavam em grupo, é mais fácil resolver qualquer problema, porque há a troca de informação onde, segundo estes: “Um vai ajudando o outro”.

Neste momento, os alunos do Grupo 3 também afirmaram que fizeram uso do *mínimo múltiplo comum* dos denominadores, entretanto, não conseguiram obter uma resposta, pois segundo estes: “nos enrolamos quando fomos dividir o número 2, 3 e 9”. O que os estudantes queriam dizer é que, para identificar o *mínimo múltiplo comum* dos denominadores das frações, é necessário realizar sucessivas divisões no número 2 (dois), 3 (três) e 9 (nove) até obter o número 1 (um), o que não foi bem sucedido pelo grupo.

Os integrantes do Grupo 3, assim como os do Grupo 4, também não conseguiram expressar o porquê do mínimo múltiplo comum. Apenas repetiram verbalmente a regra bastante utilizada, que é: “É só achar o mínimo múltiplo comum e dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima”. Nesse sentido, os dois grupos não conseguiram explicar qual é o real significado de sua utilização, ou seja, que é um modelo ou um método para estabelecer frações equivalentes quando se quer realizar a operação de adição quando os denominadores não são iguais.

É evidente que, não está errado o uso do *mínimo múltiplo comum* para somar frações com denominadores diferentes, entretanto, os alunos não compreendem o porquê de seu uso, ou seja, percebem apenas os seus aspectos exteriores mostrando um conhecimento baseado na lógica empírica.

Outro ponto a destacar é que, o Grupo 4, obteve a fração $\frac{17}{18}$, que, praticamente, já resolveria o “Problema dos Camelos”, entretanto, não compreendem o que significa essa fração.

Portanto, a não compreensão dessa fração e o uso do *mínimo múltiplo comum* como forma de realizar a operação de ação, não sabendo a sua verdadeira essência, pode indicar uma predominância do ensino tradicional que esses alunos vem tendo, onde são realizados exercícios repetitivos, cheios de regras, cujos resultados não trazem nenhum significado aos estudantes.

Os demais grupos, ao perceberem que os Grupos 3 e 4 utilizaram o *mínimo múltiplo comum,* disseram: "É verdade! Podemos usar o MMC[9] para somar as frações!", "Como não pensamos nisso antes?", "A professora explicou pra gente o MMC esses dias e esquecemos!", "Então o conhecimento não é a divisão! É a adição de fração, onde os denominadores são números diferentes". Sendo assim, os mesmos questionamentos realizados pela pesquisadora ao Grupo 4 e 3, foram, também, feitos aos demais grupos, entretanto, não souberam responder o real significado do *mínimo múltiplo comum*.

Esse momento de discussão e reflexão durou, aproximadamente, 15 (quinze) minutos. Esse tempo foi suficiente para identificar, por meio dos questionamentos da pesquisadora, como os alunos compreendem a operação de adição de fração com denominadores diferentes, que é estabelecendo o *mínimo múltiplo comum* dos denominadores das frações. Com isso, subentende-se que estes consideram que a resposta para a pergunta **"Como somar as frações da herança obtendo o número não exato?"** é estabelecendo o *mínimo múltiplo comum*. Novamente, esse procedimento não está incorreto, entretanto, pelo o fato de os estudantes não saberem o seu significado, descrevendo apenas regras, pode indicar que estes possuem um conhecimento baseado na lógica empírica, segundo Davydov (1988).

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>zona de desenvolvimento proximal e Mediação/comunicação compartilhada/interação</u>

Outro ponto a destacar é que o diálogo da pesquisadora com os Grupos 3 e 4 contribuiu para a atuação na zona de desenvolvimento proximal dos demais grupos possibilitando a identificação do objeto adição de fração com denominadores diferentes, o que responde a pergunta: **"Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?".** Dessa forma, é possível identificar a importância da comunicação compartilhada de forma a atuar na zona de desenvolvimento proximal do sujeito.

***

Após as discussões, realizou-se uma explicação mencionando aos estudantes que voltariam a falar, posteriormente, sobre o "Problema dos Camelos". Assim, foi especificado que, a pesquisadora, juntamente com Beremiz Samir, iria levá-los à uma aventura em busca de conhecimento para, mais tarde, voltarem ao problema. Assim, ao se apropriarem teoricamente

---

9 MMC é uma abreviação para mínimo múltiplo comum.

de como somar as frações da herança, e sabendo o que significa o número não exato, será possível, portanto, a resolução do "Problema dos Camelos".

4.2.2 Tarefa 2: Adição de fração com denominadores iguais e noção de inteiro

Aula 2

Em seguida, com o objetivo de fazer com que os alunos se familiarizassem com as frações, a pesquisadora os questionam se possuem conhecimento sobre onde as frações podem ser encontradas no dia a dia. A priori, mencionaram que as frações podem ser encontradas em receitas, quando estas pedem, por exemplo, para adicionar meia xícara de chá, ou três colheres de sopa e meia de algum ingrediente para fazer um bolo.

Diante disso, foi lançada a seguinte questão pela pesquisadora: **"Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?"**

A intenção dessa pergunta é levar os alunos a associarem as frações à situações do cotidiano e compreender o conceito de adição de fração com denominadores iguais. Sabemos, pelo questionário inicial, que os estudantes possuem facilidade com a adição de fração com denominadores iguais e, dessa forma, vemos esse conhecimento como ponto de partida, não para etapas já alcançadas, tal como diz o nosso referencial teórico Oliveira (1997, p. 62), "[...] mas sim para estágios de desenvolvimento ainda não incorporados pelos alunos, funcionando como um motor de novas conquistas psicológicas" que, neste caso, o estágio de desenvolvimento ainda não incorporado pelos alunos é o conceito de adição de fração com denominadores diferentes.

Assim sendo, a pesquisadora entregou para, cada grupo, uma barra de chocolate, igual à que consta na figura 49:

Figura 49 – Barra de chocolate

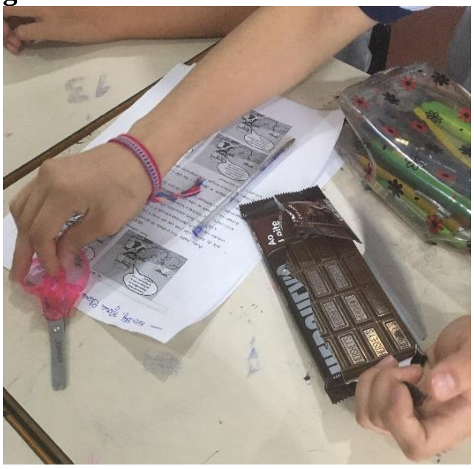
Fonte: acervo da pesquisa.

Diante disso, os alunos, deveriam retirar, incialmente, oito vinte avos da barra de chocolate e, posteriormente, mais doze vinte avos. Com isso, precisariam explicar, numericamente e geometricamente, qual é a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida no total. Assim, ao retirarem as frações, poderão perceber que a barra de chocolate foi comida inteira. Numericamente falando, a solução é obtida ao somar as frações $\frac{8}{20}$ e $\frac{12}{20}$ o que resulta em $\frac{20}{20}$, que equivale a 1 (um) inteiro, ou seja, a barra de chocolate inteira.

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>mediação/comunicação compartilhada/interação e zona de desenvolvimento proximal</u>

Durante a atividade, a pesquisadora observou os grupos e percebeu que, com o auxílio da tesoura ou mesmo com as mãos, os alunos retiravam da barra de chocolate a quantidade de retângulos que representam as frações que foram comidas e, ao mesmo tempo as representavam numericamente e geometricamente na atividade impressa. A figura 50, mostra um aluno em atividade de estudo:

Figura 50 – Aluno em atividade de estudo



Fonte: acervo da pesquisa

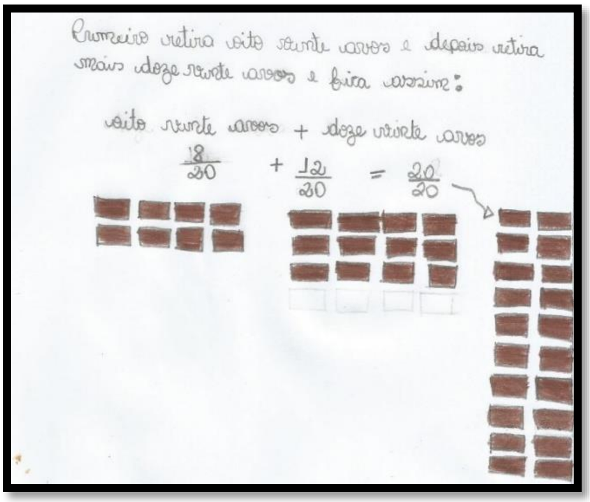
Contudo, houve perguntas, tais como: “Como vou explicar a quantidade da barra de chocolate que foi comida?”, “Eu não consigo escrever a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida. Como faz isso professora?”. Dessa forma, a pesquisadora começou a indagar os alunos levando-os a compreender que a quantidade da barra de chocolate comida se tratava de um inteiro.

Especificamente, foi dito o seguinte: “Vocês retiraram primeiramente oito vinte avos da barra de chocolate e, depois, retiraram mais doze vinte avos. No final, o que aconteceu com a barra de chocolate?”. Com isso, afirmaram que: “A barra de chocolate acabou”, “Comeu a barra inteira”, “Não sobrou nenhum retângulo de chocolate”, “Então é somar as frações que consegue achar a fração que representa quanto comeu da barra de chocolate”. Por fim, a pesquisadora pediu aos alunos para que representassem essas afirmações numericamente e geometricamente na atividade impressa.

Neste episódio, é possível constatar a necessidade da mediação da pesquisadora, possibilitando a atuação na zona de desenvolvimento proximal dos estudantes, a fim de que expressassem numericamente e geometricamente as frações.

Assim, temos que, segundo Daniels (2013), para o amadurecimento das funções embrionárias localizadas na zona de desenvolvimento proximal, é necessária a troca de experiências. Dessa forma, a fim de verificar como agiu a mediação da pesquisadora em relação ao desenvolvimento das ações mentais dos estudantes, foram selecionadas três respostas para o problema da barra de chocolate, tal como mostra as figuras 51, 52 e 53 que podem ser utilizadas como exemplo para as demais soluções fornecidas.

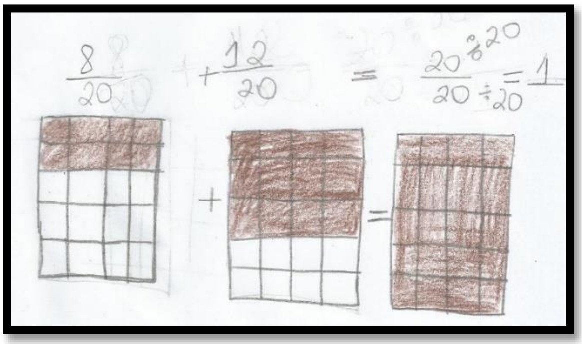
Figura 51 – Resposta para o problema da barra de chocolate



Fonte: acervo da pesquisa

De acordo com a figura, é possível perceber as frações em sua forma numérica e geométrica. Entretanto, no primeiro e segundo caso foi representado, geometricamente, apenas o valor dos denominadores das frações, sendo o número 8 e 12. Contudo, compreende-se que este aluno entende a fração $\frac{20}{20}$ como um inteiro, relacionando essa fração com sua representação geométrica ao realizar o desenho de uma seta.

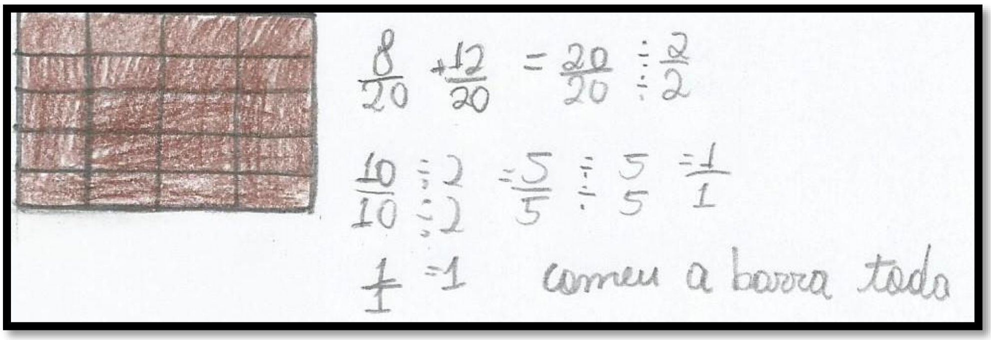
Figura 52 – Resposta para o problema da barra de chocolate



Fonte: acervo da pesquisa

Diferentemente da solução anterior, este aluno representou geometricamente as frações, ilustrando tanto o denominador, que é o valor total, quanto o numerador, que é a parte que está sendo retirada. Também é possível destacar a representação numérica e geométrica para a fração $\frac{20}{20}$, que se trata do inteiro, o que leva a considerar que este aluno compreendeu o inteiro.

Figura 53 – Resposta para o problema da barra de chocolate



Fonte: acervo da pesquisa

A figura 53, mostra que este aluno não representou geometricamente as frações que forma retiradas da barra de chocolate, entretanto, ilustrou a resposta final, sendo o inteiro. Além disso, constata-se as sucessivas divisões, utilizadas pelo estudante, para obter o valor que representa o inteiro. Com a frase "comeu a barra toda" e analisando a representação geométrica, é possível considerar que o aluno se apropriou do fato de que a fração $\frac{20}{20}$ se trata de um inteiro, ou seja, que representa toda a barra de chocolate ao somar as frações $\frac{8}{20}$ e $\frac{12}{20}$.

Diante dos dados obtidos destaca-se o papel essencial da mediação do professor no processo de ensino e aprendizagem. Assim, só foi possível os alunos representarem numericamente e geometricamente as frações, a partir do momento em que houve a intervenção da pesquisadora. Dessa forma, verifica-se que o diálogo exercido atuou na zona de desenvolvimento proximal dos estudantes, sendo constatado pelas respostas, e que este desencadeou ações mentais levando os estudantes a representarem tanto numericamente quanto geometricamente o inteiro, além de escreverem a adição de fração com denominadores iguais. Portanto, o tipo de ação mental que foi desenvolvida nesses estudantes, sendo a ação mental de abstração empírica ou teórica, foi evidenciada na exposição e discussão dos resultados, que se deu na aula 3.

Aula 3

A terceira aula ocorreu no dia 18/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta minutos) e estavam presentes 30 alunos.

A pesquisadora inicia a aula dando as boas-vindas e menciona que seria dada continuidade a aula anterior. Assim, pediu que os grupos fossem formados novamente.

Neste dia, os alunos voltaram a ficar inquietos e mencionavam que não se lembravam mais da aula passada. Talvez isso seja porque, a última aula, ocorreu há 4 (quatro) dias.

Novamente a pesquisadora volta a trazer o “Problema dos Camelos”, motivando os alunos a entrarem em atividade de estudo, e recorda a aula passada, perguntando como representaram geometricamente as frações que foram retiradas da barra de chocolate.

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>Mediação/comunicação compartilhada/interação e pensamento empírico/pensamento teórico</u>

Sendo assim, um integrante do Grupo 6 mencionou que retirou, primeiramente, oito retângulos de chocolate e, posteriormente, mais doze, desenhando-os na atividade impressa. Por fim, tiveram como resultado que a barra de chocolate foi comida por inteiro, pois foram retirados vinte retângulos de um total de vinte. Portanto, concluem que “como o número de cima ficou igual ao debaixo não existe nenhuma sobra”.

Após a explicação, foi pedido ao estudante para que mostrassem o desenho para a turma. No momento em foram expostos os resultados, os outros grupos disseram: “Nós fizemos igual”, “Também representamos desse jeito”, “Vocês não representaram geometricamente que a barra de chocolate foi comida por inteiro”, “Nós fizemos diferente!”. Houve vários apontamentos simultâneos. Assim, a pesquisadora pediu para que se acalmassem porque todos seriam ouvidos.

Os integrantes do Grupo 1, 2 e 4 se prontificaram afirmando que não se pode representar uma fração como o integrante do Grupo 6 representou. Sendo assim, explicaram que, os desenhos que indicam as frações $\frac{8}{20}$ e $\frac{12}{20}$ na atividade impressa do integrante do Grupo 6, expressa um número inteiro e não uma fração.

Diante disso, foi pedido aos grupos para que explicassem, para toda a turma, como as frações podem ser representadas geometricamente. Dessa forma, o Grupo 4 tomou a frente e mencionou que, primeiro é preciso desenhar a barra de chocolate e fazer, nela, 20 (vinte) repartições. Essas repartições são os retângulos de chocolate que a formam. Assim, pinta-se oito retângulos, representando a parte que foi comida inicialmente. Em seguida desenha-se mais uma barra de chocolate contendo as mesmas medidas da outra, e pinta-se doze retângulos, indicando a fração que foi comida posteriormente. O resultado dessa adição é representado desenhando toda a barra de chocolate, pintando-a por completo, o que significa que todos os retângulos de chocolate foram comidos.

A pesquisadora aproveitou a fala do Grupo 4, para introduzir o significado do conceito de adição de fração com denominadores iguais. Assim, foi perguntado: “Vocês mencionaram que desenharam a barra de chocolate contendo vinte retângulos, e retirou dela oito vinte avos.

Depois desenharam a barra de chocolate com as mesmas medidas da que desenhou anteriormente. Por que vocês desenharam a segunda barra de chocolate com a mesma medida da outra?”.

Assim, um integrante do Grupo 4 afirmou: “Porque é a mesma medida, os retângulos foram retirados da mesma barra de chocolate”. Logo após, uma segunda pergunta foi direcionada ao integrante do Grupo 4 e para toda a classe: “Com essa afirmação, que acabaram de dizer, vocês e toda a classe conseguem explicar **porque na adição de fração, quando os denominadores são iguais, sempre se repete o denominador e soma os numeradores?”.** Portanto, concluíram que repete o denominador “porque as frações foram retiradas de uma mesma quantidade”, tal como disseram.

A fim de explorar ainda mais essa situação, foi questionado se os denominadores das frações podem ser somados. A princípio, disseram apenas que não. Com isso, a fim de que explicassem melhor porque não se pode somar os denominadores, foi realizado o seguinte questionamento: “Se somarmos os denominadores das frações vai dar quanto?” Diante disso concluíram que daria 40 (quarenta). Assim, mais uma vez, foi perguntado o motivo pelo o qual não se deve somar os denominadores, mas sim conservá-los e somar apenas os numeradores. Portanto, um integrante do Grupo 4 explicou que: “Se somar vinte mais vinte vai dar quarenta e não tinha quarenta retângulos de chocolate por isso repete o número vinte”.

Com esse diálogo, ouvia-se os outros grupos refletindo sobre suas análises, estes diziam: “Então nosso desenho está errado, não representa assim as frações”, “Agora entendi que não pode somar os denominadores das frações”, “Então é por isso que sempre repetimos o denominador”. Isso confirma o que diz o nosso referencial teórico que, com a interação, a criança coloca “[...] em movimento vários processos de desenvolvimento que, sem a ajuda externa, seriam impossíveis de ocorrer. Esses processos se internalizam e passam a fazer parte das aquisições do seu desenvolvimento individual” (REGO, 1995, p. 74).

Por fim, uma fala que chamou a atenção da pesquisadora foi: “Professora, nós desenhamos toda a barra de chocolate, representando que ela foi comida por inteiro, porque é obvio que isso aconteceu. Não precisou retirar nenhum retângulo para perceber isso”. Essa afirmação veio de um integrante do Grupo 3, confirmando o que diz Hedegaard (2013), que cada criança possui a sua forma e velocidade de aprendizagem. Assim, enquanto haviam alunos que precisavam retirar os retângulos da barra de chocolate para perceberem o inteiro, já outros, mentalmente, visualizavam a solução do problema.

Sobre o tipo de ação mental desenvolvida, em relação ao conceito de adição de fração com denominadores iguais, nota-se a predominação da ação mental de abstração teórica, que se trata de um processo que inclui a descoberta das relações essenciais as quais caracterizam a essência e as propriedades de um objeto de estudo (LIBÂNEO, 2016). Dessa forma, pelo fato dos estudantes terem reconhecido a essência do conceito ao mencionar que não se deve somar os denominadores das frações por se tratar do inteiro, no qual o numerador representa o valor que está sendo retirado desse mesmo inteiro, compreende-se que estes desenvolveram ações mentais de abstração teórica.

A ação mental de abstração teórica, é uma das características do pensamento teórico. Entretanto, isso não significa que os estudantes formaram esse tipo de pensamento acerca do conceito de adição de fração com denominadores iguais, pois há uma outra característica do pensamento teórico que deve ser levada em consideração: a ação mental de generalização teórica, que significa obter um modo geral de pensar e de agir em relação ao objeto (LIBÂNEO, 2016). Dessa forma, a culminância da abstração teórica e generalização teórica resulta na formação do pensamento teórico, que pode ser constatado quando o aluno aplica a relação geral em situações particulares (contextualizadas), tal como afirma Freitas (2016), o que poderá ser verificado na quarta ação de aprendizagem do experimento de ensino.

4.2.3 Tarefa 3: Equivalência de frações e adição de fração com denominadores iguais

Aula 3

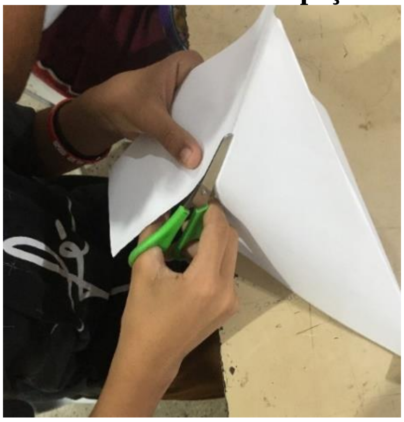
Após as discussões, que duraram aproximadamente 20 (vinte) minutos, foram iniciadas as tarefas de aprendizagem planejadas para a terceira aula.

Dessa forma, foi pedido aos alunos para que lessem uma história em quadrinho (Apêndice A), que traz uma explicação sobre Tangram, bem como a sua história.

Posteriormente, folhas de papel A4 foram entregues para todos os integrantes dos grupos para que construíssem as peças do Tangram, conforme indicavam as instruções contidas na atividade impressa que foi dada (Apêndice A).

A figura 54, mostra um aluno construído as peças do Tangram:

Figura 54 – Aluno construindo as peças do Tangram

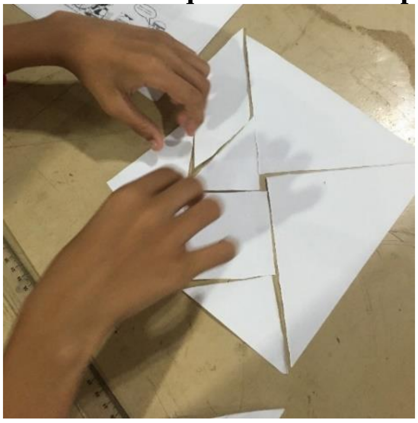


Fonte: acervo da pesquisa

Os alunos não apresentaram dificuldades para construir as peças do Tangram. Dessa forma, após essa construção, foi perguntado se eles reconheciam as figuras geométricas que acabaram de fazer com o papel. Todos reconheceram o paralelogramo, o quadrado, e os triângulos. Em seguida, foram orientados para que, em grupo, refletissem e analisassem uma forma de montar um quadrado com as peças do Tangram, pois, em seguida, iriam responder algumas questões envolvendo-o.

A figura 55, mostra um aluno montando o quadrado com as peças do Tangram:

Figura 55 – Aluno montando o quadrado com as peças do Tangram



Fonte: acervo da pesquisa

Todos os grupos conseguiram montar o quadrado, entretanto, nesta aula, por falta de tempo, não foi possível dialogar sobre como o construíram. Além disso, pelo mesmo motivo, não foi possível propor as tarefas de aprendizagem que objetivam aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais, generalizar esse conceito para subtração e introduzir a ideia de fração equivalente. Dessa forma, foi pedido para que os alunos guardassem as peças do Tangram, pois seria dada continuidade na próxima aula.

Aula 4

A quarta aula ocorreu no dia 19/11/2019, com uma duração de 50 minutos e estavam presentes 32 alunos.

A pesquisadora inicia a aula dando as boas-vindas e pede novamente a formação dos grupos. Em seguida, foi solicitado aos alunos para que construíssem novamente o quadrado com as peças do Tangram. Dessa forma, ouvia-se: “Que legal!”, “Eu gostei muito de construir o quadrado”, “Eu achei bem fácil montar o quadrado”. Em contrapartida, falas como: “Não acredito que vou construir o quadrado de novo! Eu achei bem difícil”, “Eu custei construir o quadrado ontem”, “Vou ter que pensar muito de novo!”, também foram ouvidas.

Após a montagem do quadrado, a pesquisadora perguntou como construíram-no. Assim, mencionaram que basta tomar inicialmente os dois triângulos maiores, pois segundo o integrante do Grupo 3: “Dá pra fazer a metade do quadrado com os dois triângulos grandes, e outra metade é só ir encaixando”.

Em seguida, os alunos forma convidados para analisar o Tangram e responder a seguinte pergunta: **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?**

Inicialmente, os estudantes demonstraram bastante dificuldade para responder a essa questão. Não somente essa, mas todas as outras questões planejadas para esta aula. Dessa forma, houve a necessidade da mediação da pesquisadora.

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>Mediação/ comunicação compartilhada/ interação e zona de desenvolvimento proximal</u>

Nesse sentido foi relembrada a barra de chocolate, indagando aos alunos como ela era formada, ou seja, qual a figura geométrica que a compreendia. Sendo assim, disseram que era composta por vinte retângulos. Em seguida, foi perguntado se os retângulos eram iguais ou diferentes um dos outros. Com isso, afirmaram que eram iguais. Por fim, a seguinte indagação foi lançada: “E o Tangram? Também pode ser representado por uma só figura, assim como na barra de chocolate?”

Com esse questionamento, imediatamente, os alunos procuravam uma figura conforme a pesquisadora havia explicado. Diante disso, sentiu-se que os alunos compreenderam o que era preciso ser feito e, logo em seguida, perceberam que o Tangram, pode ser subdivido em 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno.

Segundo os alunos, foram feitas tentativas para descobrirem qual figura poderia representar todo o Tangram. Dessa forma, ao tentarem com o triângulo pequeno, perceberam que ele representava a metade do quadrado, a metade do paralelogramo e a metade do triângulo médio. Logo, concluíram que o triângulo pequeno pode representar todo o Tangram.

Dessa forma, novamente, a pesquisadora lança a pergunta: **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?** Imediatamente os alunos afirmaram que o paralelogramo, o quadrado e o triângulo médio equivalem a dois dezesseis avos do Tangram. Isso porque, o triângulo menor, que equivale a um dezesseis avos, cabe duas vezes no quadrado, duas vezes no paralelogramo e duas vezes no triângulo médio. Além disso, como a questão está pedindo a fração do inteiro que representa os dois triângulos pequenos, e cada um equivale a um dezesseis avos, logo tem-se que estes juntos equivalem a dois dezesseis avos, assim como as outras figuras.

Prosseguindo, outra pergunta foi realizada aos alunos: **Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram?** Nesse instante os estudantes afirmavam: “Agora é a continha é de menos!”, “Se é pra retirar, então deve ser subtração”. Assim, afirmaram que basta retirar dois dezesseis avos, que representa o quadrado, mais um dezesseis avos, que representa o triângulo pequeno. Dessa forma o resultado é igual a treze dezesseis avos.

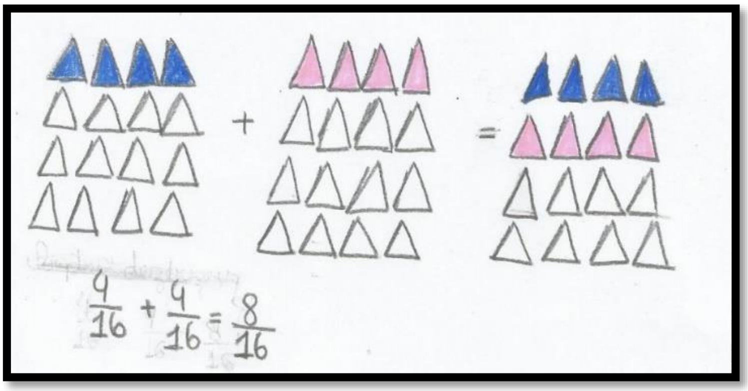
Logo após foi perguntado: **O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?** Assim, afirmaram que continua da mesma forma, ou sejam “não muda, porque estão retirando de uma mesma quantidade”.

Analisando esses acontecimentos, é possível verificar que, segundo Oliveira (1997), o professor deve ter como ponto de partida aquilo que a criança consegue realizar sozinha (nível de desenvolvimento real). Sendo assim foi necessário iniciar o processo de mediação, a partir do conhecimento apropriado na aula anterior (problema da barra de chocolate), objetivando atuar na zona de desenvolvimento proximal dos estudantes, o que possibilitou a resolução das questões.

***

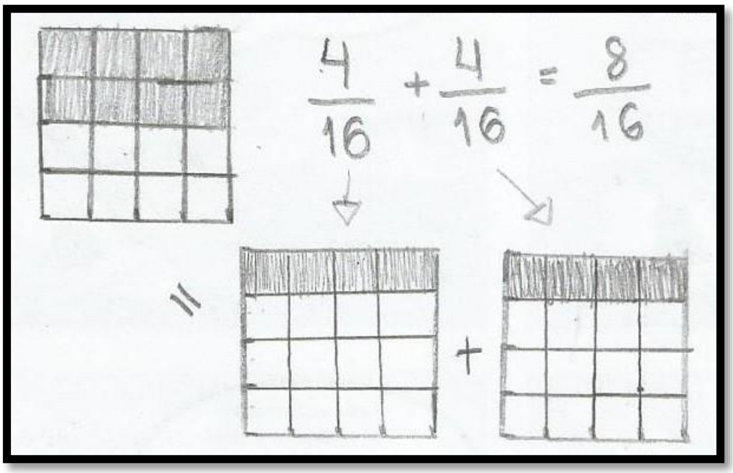
Por fim, foi questionado aos estudantes sobre **qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos** e, além disso, foi solicitada a representação dessa situação na forma numérica e geométrica. As figuras 56, 57 e 58 ilustram a predominância das respostas fornecidas.

Figura 56 – Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos?



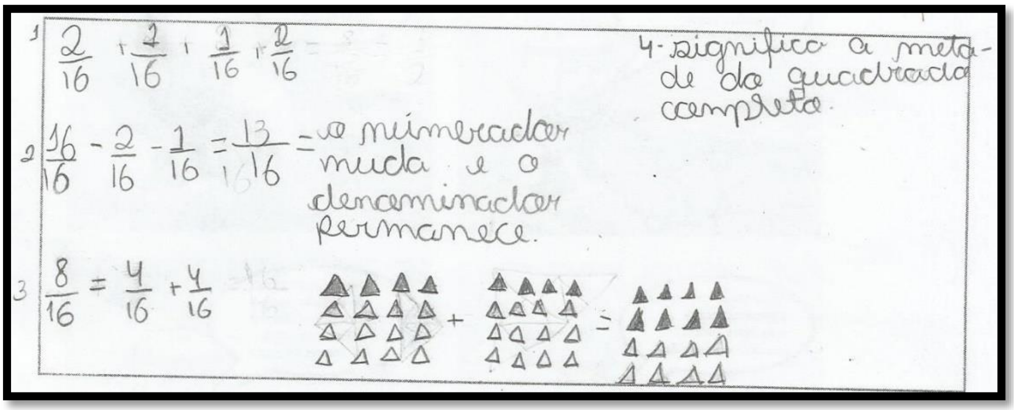
Fonte: acervo da pesquisa

Figura 57 – Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos?



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 58 - Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos?



Fonte: acervo da pesquisa

De acordo com as figuras é possível constatar, novamente, que estes estudantes compreenderam como se dá a representação numérica e geométrica da adição de fração com denominadores iguais. Dessa forma, durante a realização dessa atividade, os estudantes não apresentaram dúvidas. Sendo assim, acredita-se que esse fato se deve pelo motivo de que os alunos já desenvolveram a ação mental de abstração teórica na aula sobre o problema da barra de chocolate, o que possibilitou uma certa facilidade ao se depararem com este problema é similar.

- **Evidenciando a categoria de análise**: Mediação/ comunicação compartilhada/ interação e pensamento empírico/pensamento teórico

Prosseguindo, terminada as representações geométricas, todos os grupos expuseram os seus resultados. Em seguida, objetivando introduzir o conceito de fração equivalente a pesquisadora lança a seguinte indagação: “Vamos analisar as representações que vocês fizeram e o Tangram? **O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?”.** Assim, um integrante do Grupo 4 mencionou que: “É por que pintamos oito triângulos de um total de dezesseis”.

Neste momento todos os alunos começaram a discutir entre si. Alguns diziam: “Eu não fiz triângulo, eu fiz quadrado!”, “Professora tem que fazer triângulo?”, “Por que não pode ser quadrado?”. A pesquisadora afirmou que todos estavam corretos, pois cada um escolheu uma forma de representar.

Em seguida, a pesquisadora refaz a pergunta realizada anteriormente: “Vou melhorar a pergunta: Por que vocês obtiveram a fração oito dezesseis avos?” Assim, explicaram que, para isso, somaram as frações que representam os dois triângulos grandes. Mais uma vez os alunos são questionados: “O que representa os dois triângulos grandes juntos?” Sendo assim, um integrante do Grupo 4, afirmou: “Representa a fração oito dezesseis avos”. Percebendo que não era a resposta esperada, realizou-se outra indagação: “O que representa os dois triângulos grandes juntos em relação ao quadrado todo e como fica isso em fração?” Dessa forma, o integrante do Grupo 4 mencionou que a fração oito dezesseis avos representa duas partes do quadrado e que resultaria, em fração, segundo o aluno “duas parte de quatro”.

Com isso, foi solicitado aos alunos para que refletissem sobre as frações $\frac{8}{16}$ e $\frac{2}{4}$ observando o Tangram e as representações que construíram, buscando encontrar alguma semelhança. Portanto, afirmaram que elas são “iguais” por que as duas representam a metade do quadrado.

Nesse sentido, a pesquisadora mencionou que, na verdade, a nomenclatura correta é “equivalente”. Dessa forma, falas como: “Eu já ouvi falar desse nome”, “Já explicaram frações equivalentes para a gente mas eu esqueci”, foram ouvidas.

Por fim, objetivando que os alunos percebessem a fração $\frac{1}{2}$, foi perguntado: "Se os dois triângulos grandes juntos representam a metade do quadrado, em quantas partes o quadrado pode ser dividido?". Com facilidade os alunos responderam que pode ser dividido em duas partes. Assim, não foi preciso realizar outras indagações, pois reconheceram que os dois triângulos grandes juntos equivalem a $\frac{1}{2}$ do quadrado. Logo, reconheceram que $\frac{8}{16}, \frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são frações equivalentes.

Diante desses dados, é possível perceber a importância do processo de mediação na percepção das frações equivalentes. Entretanto, por mais que os alunos tenham visualizado que as frações são equivalentes, ainda não se pode afirmar que tenham formado a ação mental de abstração e generalização que caracteriza o pensamento teórico, pois é necessário a descoberta da relação essencial do conceito e obter um modo geral de pensar e de agir sobre este, o que não foi realizado nesta tarefa.

Sendo assim, considera-se que, até o momento, foram desenvolvidas ações mentais de abstração e generalização empírica: abstração empírica, pois os estudantes ainda não foram de encontro com a essência do conceito de frações equivalentes e generalização empírica, pois os alunos compreenderam que as frações são equivalentes, entretanto, não determinaram um modo geral de agir e pensar sobre estas, que é multiplicar ou dividir o denominador e o numerador de uma fração por um mesmo número quando se quer obter frações equivalentes, e aplicar essa relação em situações particulares.

Mesmo permanecido no campo empírico, vemos este como um degrau inicial para a formação do pensamento teórico, tal como afirma Freitas (2016). Assim, a formação ou a não formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, acerca do conceito de frações equivalentes, ainda será relatado na descrição e análise das próximas tarefas de aprendizagem.

4.2.4 Tarefa 4: Adição de fração com denominadores diferentes: relação geral

Aula 5

A quinta aula ocorreu no dia 20/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 32 (trinta e dois) alunos.

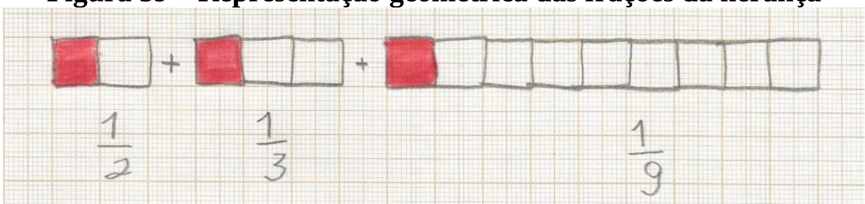
A pesquisadora inicia a aula dando as boas-vindas e solicita, novamente, a formação dos grupos. Em seguida menciona a todos que voltariam a falar do "Problema dos Camelos", pois iriam investigar uma forma de somar as frações do problema, tendo em vista as aulas anteriores sobre a barra de chocolate e o Tangram. Dessa forma, ouvia-se os alunos afirmarem:

“Professora, a gente não copiou do quadro até agora, eu estou achando isso tão bom!”, “As aulas podiam ser sempre assim!”.

Após as primeiras recomendações, foram entregues os papeis milimetrados à todos. Posteriormente, a pesquisadora mencionou o seguinte: **Nas aulas anteriores, representamos geometricamente e numericamente a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las.**

Durante as análises, a pesquisadora apenas observou os grupos, constatando uma grande dificuldade para obter a resposta de como somar as frações. Os alunos, portanto, apenas representaram geometricamente as frações da herança, sem obter uma resposta, tal como mostra a figura 59:

Figura 59 – Representação geométrica das frações da herança



Fonte: acervo da pesquisa

Diante disso, foi perguntado porque não estavam conseguindo somar as frações. A resposta dada foi que não é possível somar as frações como somaram no problema da barra de chocolate porque, agora, os denominadores são diferentes. Assim, disseram que, desta vez, “A quantidade de quadradinhos está diferente”, ou seja, os denominadores das frações não são iguais.

Os alunos não conseguiram encontrar uma solução para somar as frações da herança porque os denominadores eram diferentes. Dessa forma, afirmavam que não podem somar os denominadores. Além disso, mencionaram que na adição de fração com denominadores iguais, era mais fácil realizar a operação de adição porque se tratava de um mesmo inteiro e, agora, “É difícil porque não é uma mesma quantidade”, tal como diziam os alunos.

Especificamente, fizeram uma analogia com as aulas anteriores e explicaram que, agora, é como se tivessem três barras de chocolate de tamanhos diferentes, onde a fração $\frac{1}{2}$ significa que a barra de chocolate foi comida pela metade. Assim, continuaram dizendo que a fração $\frac{1}{3}$

indica que a barra de chocolate “Está dividida em três retângulos e comeu um pedaço”. O mesmo foi explicado para a fração $\frac{1}{9}$.

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>Mediação/ comunicação compartilhada /interação</u>

Diante disso, foi perguntado aos alunos: “Vocês disseram que é difícil somar as frações porque não se trata de uma mesma quantidade. Para perceberem isso vocês fizeram uma analogia com a aula sobre a barra de chocolate, certo? E a aula sobre o Tangram? Será que podemos retirar algum conhecimento de lá para nos ajudar?**”**

Neste momento, houve um silêncio na sala de aula. Assim, a pesquisadora perguntou se os alunos se lembravam das frações $\frac{8}{16}, \frac{2}{4},$ e $\frac{1}{2}$, perguntando o que representavam em relação ao quadrado. Portanto, responderam que se tratavam da metade do quadrado. Em seguida, foram questionados se essas frações são diferentes, sendo confirmado pelos estudantes que sim, ou seja, não são iguais.

Assim, a seguinte questão foi levantada: “Se essas frações são diferentes, como podem representar a metade do quadrado?” Com isso, ouvia-se falas, tais como: “É verdade, parece diferente mas elas não são”, “Então as frações são iguais”. Posteriormente, a pesquisadora afirma que, na verdade, elas são chamadas de frações equivalentes e conclui perguntando: “E agora, analisando o que discutimos até aqui, o que podemos fazer para somar as frações da herança?”

Diante disso, uma resposta em forma de pergunta foi realizada por um integrante do Grupo 4: “A gente tem que procurar frações equivalentes?”. Pesquisadora: “Por que precisamos fazer isso?”. Integrante do Grupo 4: “Por que elas não representam a mesma quantidade igual essas do Tangram”. Assim, segundo o aluno, deve-se procurar frações equivalentes porque as frações da herança não representam uma mesma quantidade, pois na fração $\frac{1}{2}$ “Tirou um de dois”, na fração $\frac{1}{3}$ “Tirou um de três” e, na fração $\frac{1}{9}$, “Tirou um de nove”. Portanto, “São quantidade diferentes”.

Com esse diálogo, é possível perceber, em parte dos alunos, que houve a identificação da relação geral do objeto adição de fração com denominadores diferentes, que é a obtenção de frações equivalentes para realizar essa operação. Entretanto, sabemos que os alunos são heterogêneos, ou seja, se comportam de formas diferentes no processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, a relação geral, para esses estudantes, poderá, ou não, ser identificada em uma outra ação de aprendizagem, o que dependerá da maturação das funções que estão em seu estado embrionário, localizadas na zona de desenvolvimento proximal, que se dá por meio da troca de experiências, da comunicação compartilhada e mediação.

Para os estudantes que identificaram a relação geral, consideramos que houve uma ação mental de abstração teórica, pois perceberam a essência do conceito de adição de fração com denominadores diferentes. Entretanto, ainda é uma ação mental de generalização empírica, pois estes alunos ainda não estabeleceram um modelo de pensar e agir sobre o objeto, ou seja, ainda não relacionaram o uso do mínimo múltiplo comum como uma forma de obter frações equivalentes e aplicar esse conceito em situações particulares.

4.2.5 Tarefa 5: Estabelecendo o modelo da relação geral do objeto de estudo

Aula 1

A primeira aula da 2ª ação de aprendizagem, que objetiva a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, ocorreu dia 21/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 30 (trinta) alunos.

A pesquisadora inicia a aula dando as boas-vindas e solicita, novamente, a formação dos grupos. Posteriormente, a história em quadrinho, sobre a história do conceito de fração, é entregue, impressa, aos grupos. Dessa forma, foi informado aos estudantes que estes iriam reconstruir o acontecimento histórico que revela o surgimento das frações.

- **Evidenciando a categoria de análise**: atividade de estudo

Ao decorrer da leitura da história em quadrinho, sendo esta feita por livre e espontânea vontade de um aluno do Grupo 4, chegou-se a primeira questão: "**indicar algum instrumento de medida, que existe atualmente, que pode ser utilizado para medir as terras às margens do rio Nilo**". Sendo assim, os grupos começaram a interagir entre si, mencionando os instrumentos de medida que existem atualmente: trena, régua e fita métrica.

Prosseguindo a leitura, chegou-se no momento de fazer as medições da sala de aula utilizando um cordão. Assim, os estudantes elegeram um representante do grupo para ser o faraó e tomar a medida do cúbito, tal como mostra a figura 60, a seguir:

Figura 60 – Aluno tomando a medida do cúbito

Fonte: acervo da pesquisa.

O critério para a escolha do representante do faraó, critério este escolhido por uma discussão entre todos os grupos, foi determinado por meio de um sorteio. Dessa forma, cada grupo escreveu, em papeis, números de 1 a 10 e os sortearam entre os representantes. O faraó, portanto, seria aquele que tivesse o maior número.

Após a escolha do faraó, os agrimensores (representantes de cada grupo), tomaram a medida das paredes da sala de aula, tal como mostra a figura 61:

Figura 61 - Aluno medindo a parede utilizando o cúbito

Fonte: elaborado pela autora.

Os alunos mediram as quatro paredes da sala de aula e, após a medição, a seguinte pergunta foi lançada: **"O cúbito inteiro conseguiu medir a frente, fundo e os lados da sala de aula, sem sobrar um pedaço sequer para ser medido?".** Todos os grupos afirmaram que o cúbito inteiro não foi suficiente. Em seguida, outra pergunta foi feita aos alunos: **"O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?".** Os alunos não responderam. Sendo assim, a pesquisadora fez outra pergunta:

“Vocês mediram a sala de aula. Assim, perceberam que, no final da parede, o cordão todo coube ou faltou algum pedaço da parede para medir?”. Estas falas foram ouvidas: “Ah! Se fosse menor o cúbito daria pra medir”, “No meu faltou só esse pedaço pequeno, então teria que ser o cúbito todo e mais esse pedaço pequeno”. Novamente a pesquisadora pergunta: **“O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?”.** Portanto, disseram: “tem que cortar o cúbito”, “tem que fazer pedaços pequenos do cúbito”, “tem que dividir o cúbito”.

Após essa discussão, a leitura da história em quadrinho foi retomada. Assim, os alunos leram que os agrimensores mediram as terras, assim como estes mediram a sala de aula, usando a corda como instrumento de medida e tendo o cúbito como unidade de medida. Dessa forma, os agrimensores se depararam com um problema: o cúbito inteiro não era suficiente para fazer as medições. Com isso, foi perguntado aos alunos: **“Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?”.** Neste momento os grupos ficaram empolgados, pois sabiam exatamente o que os agrimensores deveriam fazer: “Professora, a gente teve o mesmo problema que eles!”, “Mas é fácil! eles podem dividir o cúbito como a gente falou antes!”, “Isso aconteceu de verdade, então? Que legal!”.

Nota-se, nesta etapa, por meio da observação, a motivação e o desejo dos estudantes para entrar em atividade de estudo, ao decidirem por si próprios quem seria o faraó, ao medirem a sala de aula e ao ajudar os agrimensores da história a solucionar a questão. Isso significa que a tarefa proposta pôde conter elementos (desejo, motivação) que provocaram nos alunos a necessidade de estabelecer uma relação com o objeto que é, neste caso, a história do conceito de fração, por sua forma de desafio, tal como afirma Freitas e Rosa (2015).

- **Evidenciando a categoria de analise:** <u>mediação/ comunicação compartilhada/ interação</u>

Após esse diálogo e objetivando que os alunos se apropriassem do processo histórico do conceito de fração, foi lançada a seguinte pergunta: “Vocês afirmaram que é preciso dividir o cúbito para fazer a medição. Será que podemos, ao invés de usar a palavra dividir, usar uma outra palavra que possa substituí-la?”. Os grupos não responderam. Assim, foi realizada outra pergunta: “A história em quadrinho que estamos lendo, conta a história de qual conteúdo de matemática?” Os grupos afirmaram: “Conta a história das frações”. Novamente, foi lançada a pergunta: “Vocês afirmaram que é preciso dividir o cúbito para fazer a medição. Será que podemos, ao invés de usar a palavra dividir, usar uma outra palavra que possa substituí-la?”.

Dessa forma, disseram: “É preciso fazer frações do cúbito?”. Diante disso, a pesquisadora confirmou a resposta e explicou que para realizar a medição foi necessário que os agrimensores fracionassem o cúbito.

Por fim, foi perguntado aos estudantes: “Como surgiram as frações?”. Respostas como: “O cúbito inteiro não deu pra medir e teve que fracionar o cúbito”, “Os agrimensores, igual a gente aqui na sala, não conseguiu medir com o cúbito todo, faltou um pedaço, então tivemos que fracionar o cúbito para conseguir medir”, foram ouvidas. Sendo assim, compreendendo que os alunos se apropriaram do processo histórico do conceito de fração, por meio da execução das tarefas e mediação, foi explicado aos estudantes que os egípcios faziam subunidades do cúbito para conseguir medir as terras, cujas subunidades do cúbito podemos chamar de uma parte do cúbito ou uma fração do cúbito. Portando, o surgimento das frações se deve a uma necessidade de medir, ou seja, a unidade de medida padrão da época, que era cúbito, não foi suficiente para fazer as medições, sendo necessário subdividi-lo.

Neste momento, a aula foi encerrada. Assim, foi solicitado aos estudantes que guardassem os cordões utilizados para fazer as medições e os trouxessem na próxima aula.

Aula 2

A segunda aula da 2ª ação de aprendizagem, que objetiva a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, ocorreu dia 25/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 31 (trinta e um) alunos.

A pesquisadora inicia a aula dando as boas-vindas e solicita, novamente, a formação dos grupos. Em seguida, a aula anterior foi retomada a fim de que os alunos se recordassem do surgimento do conceito de fração, que se deve a uma necessidade humana em medir. Logo após, a seguinte pergunta foi realizada pela pesquisadora aos estudantes: **“Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida?”.** Os alunos não responderam. Sendo assim, foi solicitado aos estudantes para que comparassem os cordões utilizados para fazer as medições e refletissem sobre a seguinte questão: **“Qual é a diferença entre os comprimentos utilizados para medir a sala de aula?”.** Portanto, foi disponibilizado um tempo de dez minutos para que os grupos determinassem uma resposta.

- **Evidenciando a categoria de análise**: <u>atividade de estudo e mediação/ comunicação compartilhada/interação</u>

Durante as discussões entre os integrantes de cada grupo, a pesquisadora observou que estes interagiam entre si e que, em cada grupo, haviam até 2 (dois) alunos que tomavam a frente da discussão, ou seja, sempre impunham suas reflexões e análises enquanto os demais os ouviam, concordavam, realizavam perguntas aos mais experientes e estes os respondiam. Isso mostra que a atividade de estudo, neste momento, contribuiu para a comunicação compartilhada entre os estudantes e, além disso, a possibilidade dos alunos mais experientes atuarem na zona de desenvolvimento proximal dos demais alunos, levando-os a desenvolverem aquelas funções que, ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, tal como afirma Vygotsky (1991).

***

Terminado o tempo de dez minutos, a pesquisadora fez a seguinte pergunta: "Analisando os cordões, vocês conseguiram descobrir o motivo pelo o qual não utilizamos o cúbito como unidade de medida?". Com isso, falas como: "Tem cordão maior e outro menor", "Os cordões possuem tamanhos diferentes", "Acho que é porque não tem um tamanho igual, por isso não usa mais", foram ouvidas. Em seguida, a pesquisadora solicitou aos integrantes dos grupos para que analisassem, na atividade impressa, a tabela onde as medidas das paredes da sala de aula foram escritas. Alguns grupos obtiveram medidas diferentes, por exemplo, a medida do fundo da sala de aula para o grupo 1 e 7 foram de 18 (dezoito cúbitos), o grupo 2 e 5 mediram 17 (cúbitos), o grupo 3 obteve 19 (dezenove) cúbitos, o grupo 4 e 6 mediram 16 (dezesseis) cúbitos. Dessa forma, levando em consideração as medidas que cada grupo obteve, a pesquisadora mencionou que não mais se utiliza o cúbito porque o seu valor varia, ou seja, nem sempre a medida do cotovelo até o dedo médio de uma pessoa é igual ao de outra e, sendo assim, as pessoas entraram em comum acordo, por uma mesma unidade de medida como o metro (m) e o centímetro (cm), tal como afirma Rosa (2012).

- **Evidenciando a categoria de análise:** <u>mediação/ comunicação compartilhada/ interação, zona de desenvolvimento proximal</u>

Em seguida, foi perguntado aos estudantes: **"Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes?".** Os grupos, a princípio, não souberam responder. Assim, houve a necessidade da mediação da pesquisadora: "Quando queremos somar frações com denominadores diferentes o que devemos fazer?". Com isso, um integrante do grupo 4, indagou: "Procurar uma mesma quantidade igual vimos aquele dia?". Diante dessa resposta, novamente, foi realizada a pergunta: **"Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar**

esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes?” Nesse momento, constatou-se que a resposta do aluno do Grupo 4, seguida da pergunta realizada pela pesquisadora, possibilitou a atuação na zona de desenvolvimento proximal de parte dos estudantes. Isso se deve ao fato de que os grupos, simultaneamente, afirmaram: “Agora eu sei!”, “Entendi!” e, em seguida, um integrante do Grupo 2 explanou que o cúbito possui tamanhos diferentes e, as frações, também podem ter quantidades diversas, ou seja, denominadores que não são iguais, segundo o aluno. Dessa forma, com suas palavras, o estudante explicou que, da mesma forma que houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida, é preciso estabelecer um denominador em comum, na adição de fração, quando estes forem diferentes.

- **Evidenciando a categoria de análise**: <u>pensamento empírico/ pensamento teórico</u>

Para a pergunta: **“De acordo com o que foi discutido até o momento, explique porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?”** O grupos responderam imediatamente que, na adição de fração com denominadores diferentes, deve-se submeter a um mesmo denominador por se tratar de quantidades diferentes. Essa resposta, pode indicar a formação de ações mentais de abstração, que é uma característica do pensamento teórico. Isso se deve pelo motivo de que os estudantes apresentaram indícios de apropriação de um dos aspectos internos do objeto de estudo, que é a busca por denominadores em comum pela necessidade em recorrer a uma mesma unidade de medida, tal como diz Rosa (2012).

***

Em seguida, foi dito aos grupos: **“Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?”.** Os estudantes que responderam à pergunta, mencionaram a régua como instrumento de medida e que esta poderia fornecer o valor do comprimento de algum objeto que escolhessem para medir. O fato de os estudantes escolherem somente a régua como instrumento de medida, pode remeter aos seus conhecimentos espontâneos que, segundo Martins (2016) e também de acordo com Braga e Dias (2019), são conceitos advindos da experiência prática do sujeito em seu meio. Sabendo disso, e compreendendo que os conceitos espontâneos podem ser levados em consideração pelo professor para a formação de conceitos científicos, pois uma vez que a conexão do sujeito com o conceito científico é desencadeada pelos conceitos espontâneos (GEBERT, 2019), foi realizada uma discussão entre a pesquisadora e os grupos.

Dessa forma, foi tomada a régua, que os estudantes mencionaram, como exemplo. Assim, foi realizada uma comparação entre a mesa dos estudantes e uma régua de 30 cm: “A mesa de vocês, possui um comprimento que não sabemos qual é. A régua tem um comprimento também, que neste caso é fixo. Como podemos medir a mesa? Um aluno do Grupo 6, afirmou: “Tem que colocar a régua várias vezes até caber”. Pesquisadora: “Poderia explicar melhor?”. Assim, o aluno afirmou que a mesa possui um tamanho e a régua outro. Dessa forma, a mesa é maior que a régua, logo, para medir, é preciso colocar a régua mais de uma vez na mesa até que consiga fazer toda a medição. Novamente foi lançada a pergunta: “Então, o que é medir?”. Aluno do Grupo 4: “É ir colocando um tamanho dentro do outro tamanho até caber?”. Pesquisadora: “Medir é comparar dois comprimentos. A régua possui um comprimento e a mesa possui um comprimento também. Se quero medir a mesa, o que preciso fazer?”. Aluno do Grupo 4: “Comparar o comprimento da régua com o da mesa até caber?”. Pesquisadora: “Na linguagem matemática, seria comparar duas grandezas de mesma espécie que, neste caso, é tomar o comprimento da régua como unidade de medida para obter o comprimento da mesa”.

Após as discussões, foram entregues dois barbantes aos alunos, um maior e outro menor, para que tomassem um como unidade de medida do outro, e foi dito aos estudantes: “**Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?”.** Posteriormente, foi explicado aos alunos que deveriam obter uma fração que representa a medida do comprimento menor em relação ao maior. Entretanto, antes que os estudantes iniciassem a atividade de estudo, a aula terminou. Portanto, a tarefa se estendeu para uma terceira aula.

Aula 3

A terceira aula da 2ª ação de aprendizagem, que objetiva a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, ocorreu dia 26/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 31 (trinta e um) alunos. Portanto, a aula anterior foi retomada, a fim de relembrar o que é medir. Logo após, os grupos deram início a tarefa de aprendizagem.

Os alunos deveriam obter uma fração que representa o comprimento do cordão AB em relação a CD. Sendo assim, foi perguntando aos grupos: “Tendo em vista o que discutimos na aula anterior, como podemos obter a medida de AB?” Os alunos não responderam. Outra pergunta foi feita: “Imaginem que o comprimento maior é a mesa e o comprimento menor é a régua. Agora, como podemos obter a medida do segmento AB?”. Neste momento, falas como: “Já sei!”, “Agora entendi!”, “Agora ficou fácil!”, “Então é ver quantas vezes o comprimento menor cabe no maior”, foram ouvidas. Com isso, os grupos começaram a interagir entre si, entrando em atividade de estudo, sendo observados pela pesquisadora, constatando a comunicação compartilhada.

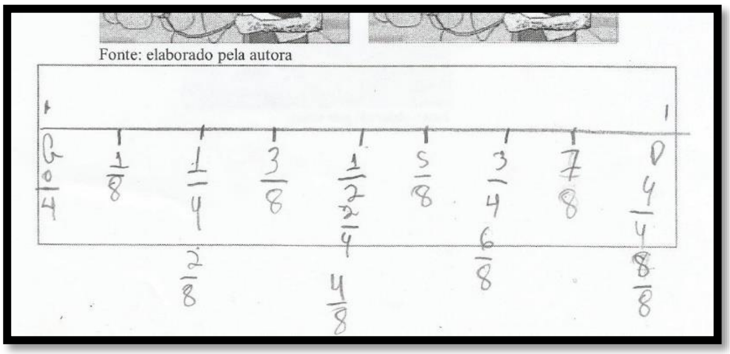
Durante a atividade, com o auxílio da tesoura, os estudantes realizavam subdivisões em CD, para obter a medida de AB, e as registravam na atividade impressa, tal como mostra a figura 62:

Figura 62 - Aluno realizando subdivisões em CD

Fonte: acervo da pesquisa.

No geral, os grupos obtiveram as seguintes subdivisões para CD, tal como mostra a figura 63

Figura 63 - Registro das subdivisões em CD



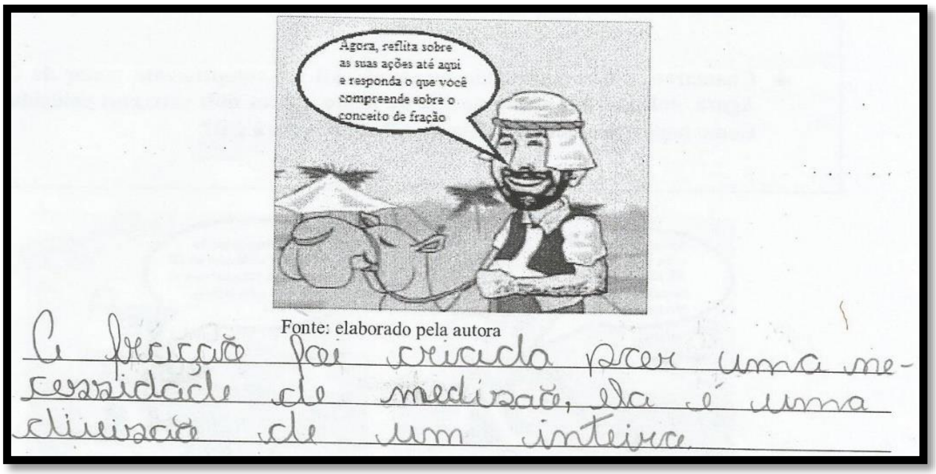
Fonte: acervo da pesquisa.

- **Evidenciando a categoria de análise**: <u>pensamento empírico/ pensamento teórico</u>

Após as subdivisões, foi perguntado aos estudantes: **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante), tomando o cordão maior como unidade de medida do cordão menor, o que vocês compreendem sobre o conceito de fração?** Assim, alguns estudantes leram as suas respostas para toda a classe.

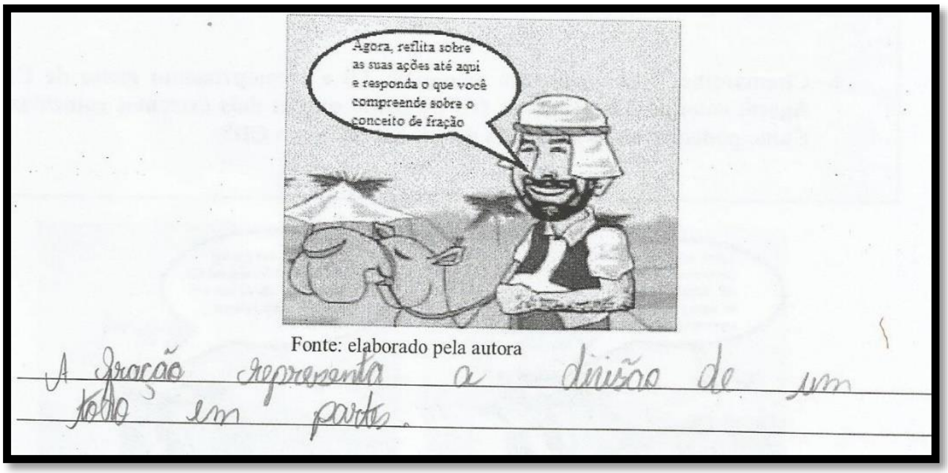
As figuras 64, 65 e 66, a seguir, ilustram o pensamento predominante em relação ao conceito de fração:

Figura 64 - Compreensão acerca do conceito de fração



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 65 - Compreensão acerca do conceito de fração



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 66 - Compreensão acerca do conceito de fração

Fonte: acervo da pesquisa

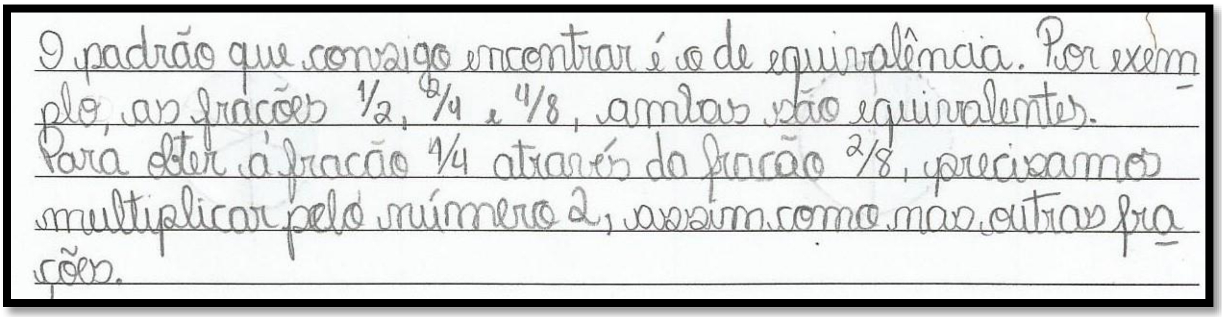
As figuras representam a predominância das respostas sobre como os estudantes compreendem o conceito de fração. É possível constatar que ainda prevalece um pensamento voltado à lógica empírica, descrevendo apenas as características externas do objeto, sendo a fração como divisão ou parte de um todo. Por outro lado, há aqueles alunos que reconhecem as características externas do objeto e, ao mesmo tempo, identificam os seus aspectos internos, sendo o conceito de fração obtido a partir da necessidade em medir, tal como mostra a figura Isso pode indicar o desenvolvimento de ações mentais de abstração para com o pensamento teórico do conceito de fração, pois o pensamento teórico baseia-se na observação das dependências externas e internas do objeto (DAVYDOV, 1988).

***

Prosseguindo, sendo o objetivo principal desta ação de aprendizagem a criação de um modelo que representa a relação geral do objeto de estudo, a seguinte pergunta foi realizada aos estudantes: "**Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?".** Assim, parte dos estudantes leram as respostas para toda a classe.

As figuras 67, 68 e 69, a seguir, ilustram as respostas predominantes para essa questão:

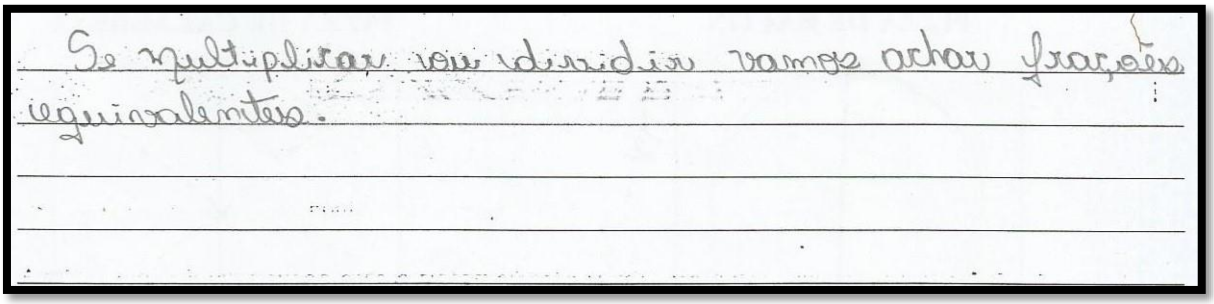
Figura 67´- Padrão encontrado para as frações (1)



O padrão que consigo encontrar é o de equivalência. Por exem
plo, as frações 1/2, 2/4 e 4/8, ambas são equivalentes.
Para obter a fração 1/4 através da fração 2/8, precisamos
multiplicar pelo número 2, assim como nas outras fra
ções.

Fonte: acervo da pesquisa

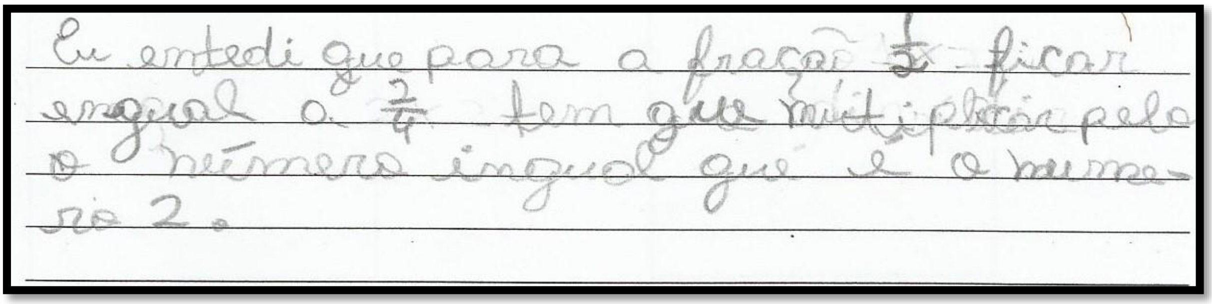
Figura 68 - Padrão encontrado para as frações (2)



Se multiplicar ou dividir vamos achar frações
equivalentes.

Fonte: acervo da pesquisa

Figura 69 - Padrão encontrado para as frações



Eu entedi que para a fração 1/2 ficar
engual a 2/4 tem que multiplicar pelo
o número engual que é o nume
ro 2.

Fonte: acervo da pesquisa

Davydov (1988) menciona que, para obter um modelo da relação geral, o aluno deve ir em busca da gênese do objeto de forma que esse modelo estabeleça as características internas do objeto. Sendo assim, diante das respostas contidas nas figuras, compreende-se que os estudantes foram em busca da gênese do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, e expressaram um modelo para obter frações equivalentes, sendo este o fato de dividir ou multiplicar o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, o que revela as características internas do conceito de adição de fração com denominadores diferentes.

Nesse sentido, nesta quinta tarefa de aprendizagem, houve a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica para com o conceito de frações equivalentes, pois foi estabelecido um modo geral de pensar e de agir sobre esse objeto, que é o fato de multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores de uma fração por um mesmo valor. Em contrapartida, por mais que parte dos estudantes tenham estabelecido o modelo para obter frações equivalentes e compreendido que estas é o núcleo do conceito do objeto adição de fração com denominadores diferentes, ainda falta relacionar esse tipo de fração à regra do mínimo múltiplo comum, ou seja, que este é um modelo para obter fações equivalentes a fim de possibilitar a adição entre duas ou mais frações que não possuem o mesmo denominador.

4.2.6 Tarefa 6: Transformando o modelo da relação geral

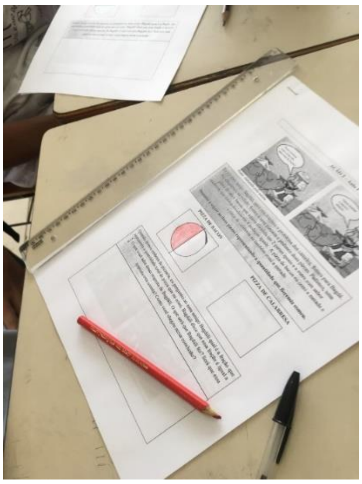
Aula 1

A tarefa 6, desta 3ª ação de aprendizagem, que objetiva a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, ocorreu dia 27/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 31 (trinta e um) alunos.

Esta tarefa objetiva introduzir mudanças na relação geral, provocando uma descaracterização no objeto, a fim de reforçar a sua base genética. Dessa forma, foi solicitado a formação dos grupos e entregue a atividade impressa para cada estudante.

Foi estabelecido um tempo de 30 (trinta) minutos para a leitura e resolução da tarefa de aprendizagem para que, em seguida, promovessem o compartilhamento das respostas entre a turma. A figura 70, a seguir, mostra um aluno realizando a tarefa de aprendizagem:

Figura 70 - Aluno em atividade de estudo

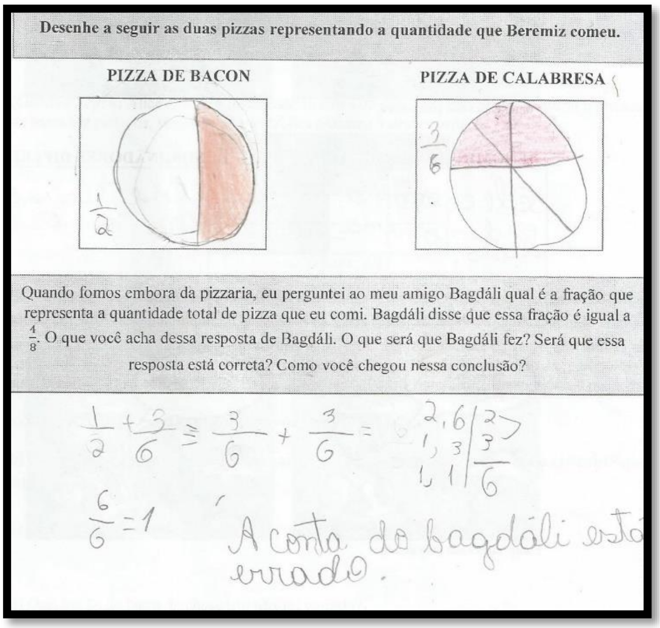


Fonte: acervo da pesquisa

Durante a atividade de estudo, os grupos se apresentaram motivados para responder a as questões. Isso se deve ao fato de que houve uma mudança na relação geral, descaracterizando o objeto de estudo. Assim, falas como: “Professora, tem alguma coisa errada a atividade!”, “Estou tentando descobrir o erro”, “Não pode somar os denominadores e ele somou os denominadores!”, foram ouvidas. Diante disso, foi esclarecido aos estudantes que estes deveriam evidenciar qual é o problema nas questões, ou seja, o qual é o erro e, dessa forma, escrever qual seria a resposta correta.

As figuras 71, 72, e 74, a seguir, ilustram as respostas predominantes para essa questão:

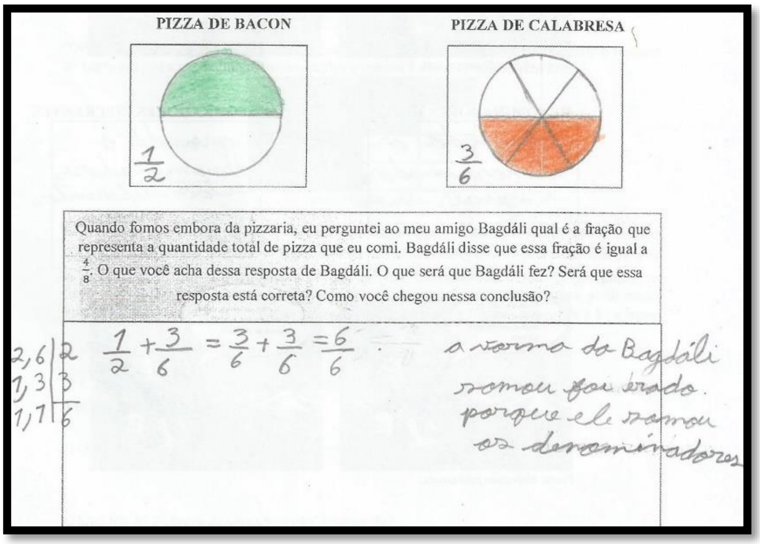
Figura 71 - Solução para o problema das pizzas (1)



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 71, o estudante representou geometricamente e numericamente as frações, identificou o erro do problema, fornecendo a resposta correta. O método utilizado para a realização dos cálculos foi o estabelecimento do mínimo múltiplo comum, sendo efetuado de forma correta pelo estudante.

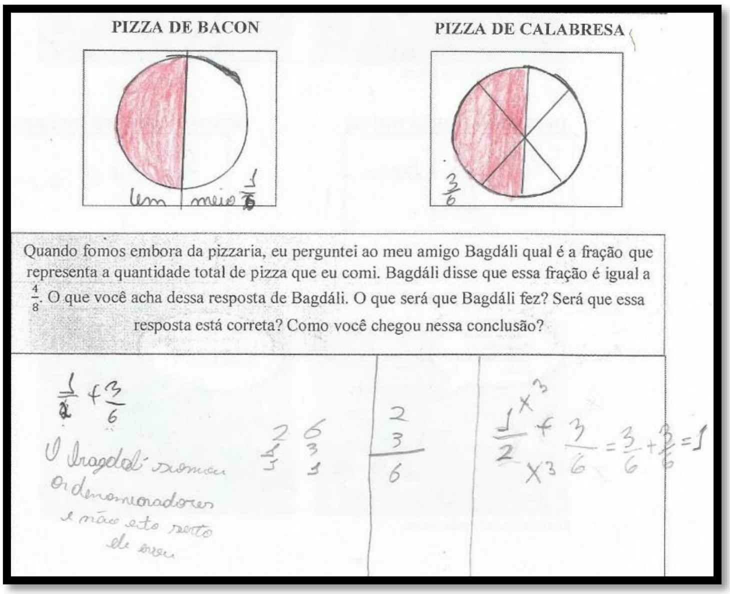
Figura 72 - Solução para o problema das pizzas (2)



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 72, o estudante representou de forma correta as frações, tanto em sua forma numérica quanto geométrica. Além disso, identificou o erro do problema e explicou afirmando que os denominadores das frações foram somados, o que não se pode ocorrer. O método utilizado para a realização dos cálculos foi o estabelecimento do mínimo múltiplo comum, sendo efetuado de forma correta pelo estudante.

Figura 73 - Solução para o problema das pizzas (3)



Fonte: acervo da pesquisa.

Na figura 73, o estudante representou corretamente as frações. Além disso, demostrou o erro do problema, ao mencionar que os denominadores das frações foram somados, o que não deve ocorrer. Um ponto a destacar é a forma que se procederam os cálculos, sendo possível perceber o uso do mínimo múltiplo comum, e o método para a obtenção de frações equivalentes, ao multiplicar ou dividir o denominador e o numerador de uma fração por um mesmo valor.

As figuras representam a predominância das respostas sobre como os estudantes compreendem a adição de fração com denominadores iguais e diferentes. Sendo assim, aqui, não mencionaram o motivo pelo o qual não se deve somar os denominadores das frações. Entretanto, ao analisar os cálculos, a escrita destes alunos e as tarefas de aprendizagem anteriores, é possível perceber que estes compreendem que os denominadores não podem ser somados, o que nos leva a considerar que entendem o denominador como o inteiro, o que caracteriza uma ação mental de abstração teórica.

Outro ponto a destacar é a utilização do mínimo múltiplo comum e, ao mesmo tempo, o uso do modelo para obter frações equivalentes. Isso pode indicar que este estudante desencadeou uma ação mental de generalização teórica, pois pode ter se apropriado do fato de que o método do mínimo múltiplo comum obtêm-se, na verdade, frações equivalentes.

- **Evidenciando a categoria de análise**: <u>mediação/ comunicação compartilhada/ interação</u>

Prosseguindo, as repostas foram discutidas entre toda a turma. Todos os grupos perceberam que os denominadores das frações foram somados e que, neste caso, não seria o modo correto de proceder com os cálculos. Assim, foi perguntado aos estudantes qual seria a forma correta. Falas como: “Ele deve tirar o MMC dos denominadores”, “Deve colocar os denominadores iguais”, “A gente precisa procurar uma mesma quantidade para os denominadores e só depois somar”, foram ouvidas. Diante disso, objetivando evidenciar a essência do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, perguntou-se: “Existe uma outra forma de igualar denominadores das frações?”. Assim, falas como: “Existe o MMC, eu acho”, “Pode ser obtendo frações equivalentes como a gente viu antes”, “A regra do MMC é mais fácil do que aquela de frações equivalentes”, “Pode só usar o MMC mesmo porque ele descobre as frações que são iguais e ele é mais fácil”, foram ouvidas. Diante dessa última resposta e a fim de relacionar o mínimo múltiplo comum como um método de obtenção de frações equivalentes, foi perguntado ao estudante: “Você pode explicar melhor o fato do MMC procurar frações iguais?”. O aluno, com suas palavras, explicou que pode apenas usar o MMC por que ele já transforma duas frações com quantidades diferentes em frações equivalentes e que é mais fácil e rápido usar esse método.

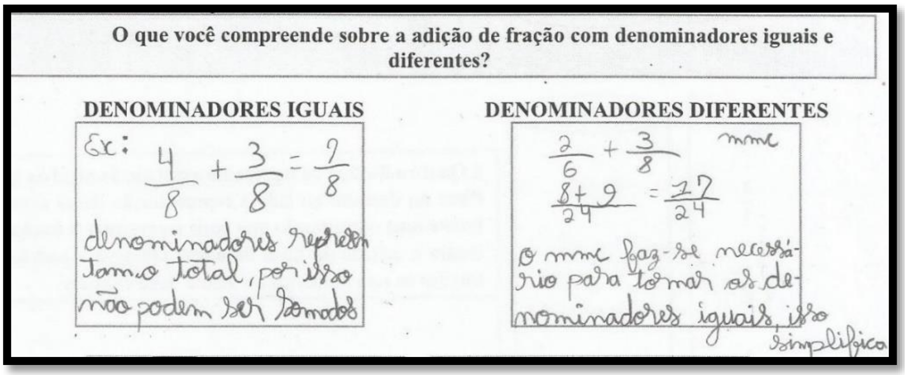
Diante desse diálogo, percebeu-se que haviam estudantes cuja relação geral do conceito de adição de fração com denominadores diferentes (frações equivalentes) ainda não foi identificada, e alunos que já a constatou. Isso pode mostrar que a aprendizagem não ocorre de forma linear, ou seja, cada sujeito são sempre heterogêneos no processo de ensino e aprendizagem, tal como afirma Oliveira (1997). Assim, por mais que, teoricamente, todos os alunos estejam na terceira ação de aprendizagem, há estudantes que ainda estão desenvolvendo as ações mentais relacionadas à primeira ação de aprendizagem.

Outro ponto a destacar é que parte dos alunos relacionaram o uso do mínimo múltiplo comum como uma forma de encontrar frações equivalentes, o que indica a formação de ações mentais de generalização teórica, característica do pensamento teórico. Além disso, pelo diálogo, foi possível perceber que houveram alunos que não conseguiram relacionar o mínimo múltiplo comum e as frações equivalentes, mostrando, mais uma vez que a aprendizagem não ocorre de forma linear para todos os estudantes.

Prosseguindo, para a segunda questão, que envolve a adição de fração com denominadores iguais, todos os grupos também identificaram que os denominadores foram somados, o que não se pode ocorrer. Sendo assim, por meio de uma conversa entre os grupos e pesquisadora, parte dos estudantes consideraram que não se pode somar os denominadores por se tratar do todo, ou seja, na fração o denominador indica o total que está sendo retirado. Isso pode indicar que os estudantes se apropriaram da essência do conceito de adição com denominadores iguais (repete o denominador e soma os numeradores) o que pode evidenciar a presença de ações mentais de abstração e generalização que são características do pensamento teórico.

Por fim, as figuras, a seguir, ilustram as respostas predominantes sobre como os estudantes compreendem a adição de fração com denominadores iguais e diferentes:

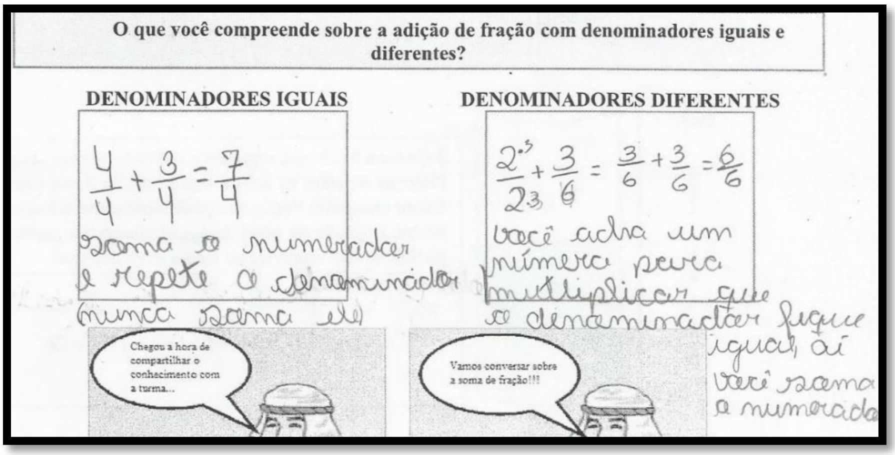
Figura 74 - Compreensão do conceito da adição de fração (1)



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 74, o estudante trouxe um exemplo para a adição de fração com denominador igual e mencionou que não se pode somar os denominadores por representar o total. Para o segundo caso, ilustrou uma adição de fração com denominadores diferentes, indicando o método do mínimo múltiplo comum a fim de estabelecer valores iguais para os denominadores das frações, pois segundo o aluno, é uma forma de simplificar o cálculos.

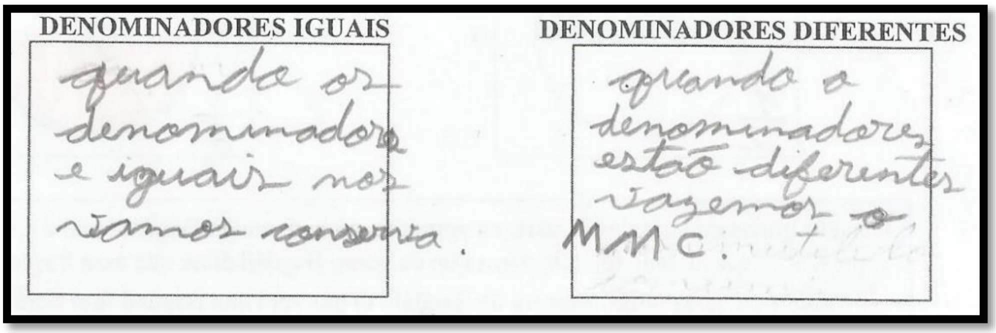
Figura 75 - Compreensão do conceito da adição de fração (2)



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 75, o estudante utilizou como exemplo uma adição de fração com denominadores iguais, realizando de forma correta o cálculo. Segundo o aluno, deve-se somar os numeradores e repetir os denominadores. Para a adição de fração com denominadores diferentes, foi ilustrado um exemplo, cujo o modelo da relação geral foi utilizado. Assim, o aluno escreve que é necessário encontrar um valor de forma a igualar os denominadores e, por fim, somar os apenas numeradores das frações.

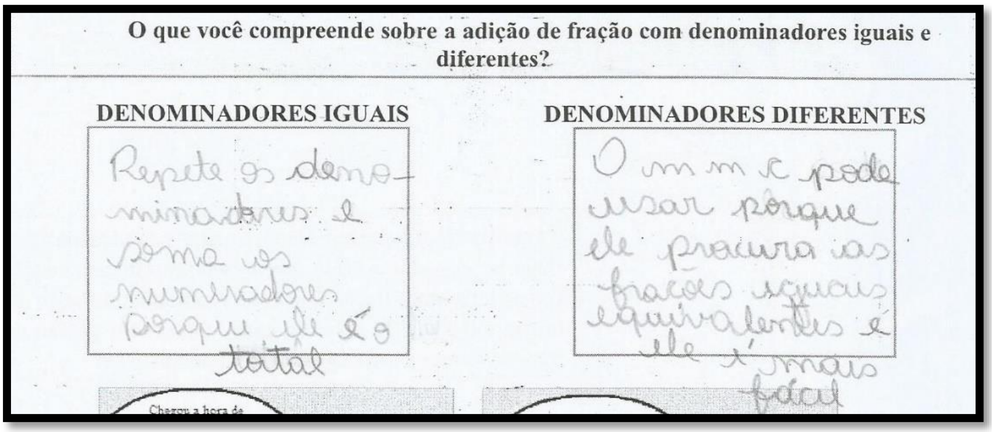
Figura 76 - Compreensão do conceito de adição de fração (3)



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 76, o estudante apenas indica que na adição de fração com denominadores iguais apenas conserva esse denominador e, na adição de fração com denominadores diferentes, basta utilizar o mínimo múltiplo comum.

Figura 77 - Compreensão do conceito de adição de fração (4)



O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes?

DENOMINADORES IGUAIS	DENOMINADORES DIFERENTES
Repete os deno-minadores e soma os numeradores porque ele é o total	O m m c pode usar porque ele procura as frações iguais equivalentes e ele é mais fácil

Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 77, o estudante mencionou que na adição de fração com denominadores iguais deve repetir o valor do denominador e somar apenas os numeradores. Assim, foi explicado que o denominador é repetido, pois representa o total. Já na adição de fração com denominadores diferentes, o aluno mencionou que o mínimo múltiplo comum pode ser utilizado porque é um método para obter frações iguais, equivalentes. Além disso, afirma que é um método “mais fácil”, o que mostra que houve uma comparação entre o método do mínimo múltiplo comum com o modelo para obter frações equivalentes.

Esta tarefa, que buscou alterar a relação geral do objeto, a fim de reforçar sua base genética, contribuiu para identificar como os alunos compreendem a adição de fração com denominadores iguais e diferentes. De acordo com as figuras e levando em consideração as tarefas de aprendizagem realizadas até este momento, é possível perceber que houve indícios da formação de ações mentais de abstração e generalização teóricas para o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, o que caracteriza o pensamento teórico. Portanto, é possível perceber a generalização teórica, ao relacionar o mínimo múltiplo comum à obtenção de frações equivalentes, e a abstração teórica por identificar a equivalência de fração como a relação geral do objeto de estudo.

Para a adição de fração com denominadores iguais, também é notório o desenvolvimento de ações mentais de abstração e generalização teórica. Ao relacionarem o fato de não se somar os denominadores das frações, por este representar o inteiro, pode indicar a formação de uma ação mental de abstração, pois foi de encontro com a essência do objeto. Para a generalização teórica, que é estabelecer um modo de pensar e agir sobre o objeto, foi indicado que deve repetir os denominadores e somar os numeradores. Sendo assim, pelo fato de os estudantes indicarem esse modelo e identificarem a essência do objeto de estudo adição de fração com denominadores iguais, tem-se que ações mentais de abstração e generalização teóricas podem ter sido desenvolvidas nesses estudantes.

4.2.7 Tarefa 7: Trabalhando as unidades conceituais em situações contextualizadas

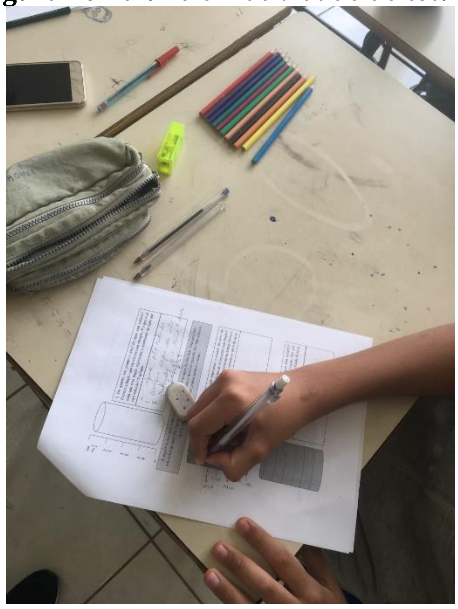
Aula 1

A tarefa 7, desta 4ª ação de aprendizagem, ocorreu dia 28/11/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 30 (trinta) alunos.

Foi solicitado aos estudantes a formação dos grupos. Em seguida a tarefa sobre “explorando as cheias do Rio Nilo” foi entregue a cada estudante.

A figura 78, mostra um aluno em atividade de estudo:

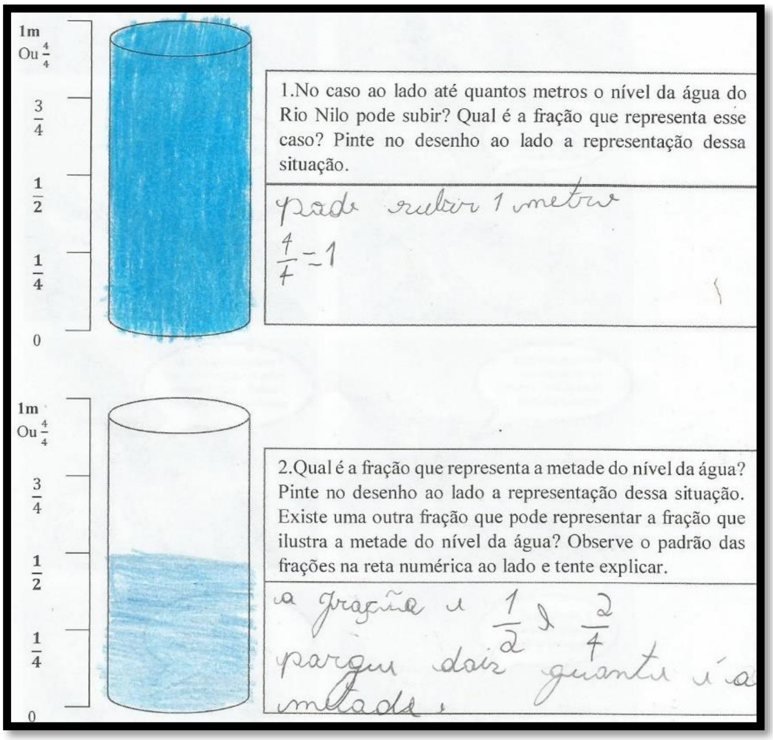
Figura 78 - aluno em atividade de estudo



Fonte: acervo da pesquisa

Para as questões 1, 2 e 3, ao analisar os dados, percebeu-se que os estudantes possuíram facilidade para com a representação geométrica de frações, fração equivalente e adição de frações com denominadores iguais. Sendo assim, todos os estudantes responderam corretamente as questões. As figuras 79 e 80, exemplificam a resposta dos alunos:

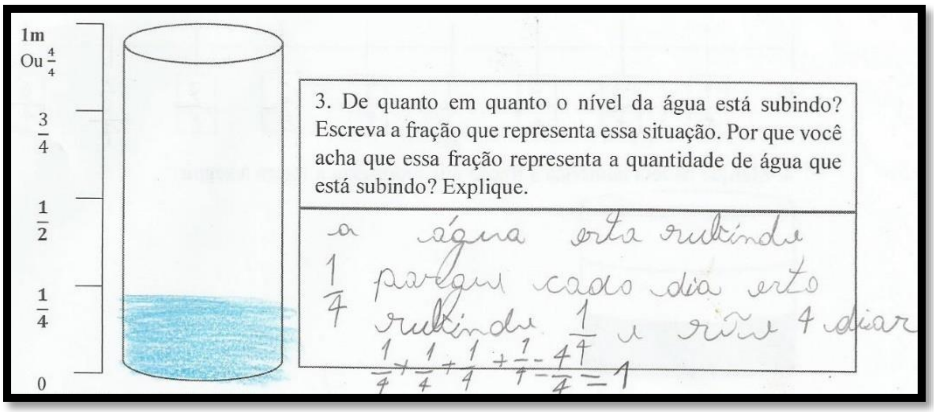
Figura 79 - Resposta questão 1 e 2: explorando as cheias do Rio Nilo



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 79, o estudante representou as frações de forma correta ao pintar as figuras em azul. Além disso, é possível perceber que este aluno, na questão 1 compreendeu que se trata de um inteiro e, na questão 2, que as frações são equivalentes e representam a metade no nível da água.

Figura 80 - Resposta questão 3: explorando as cheias do Rio Nilo

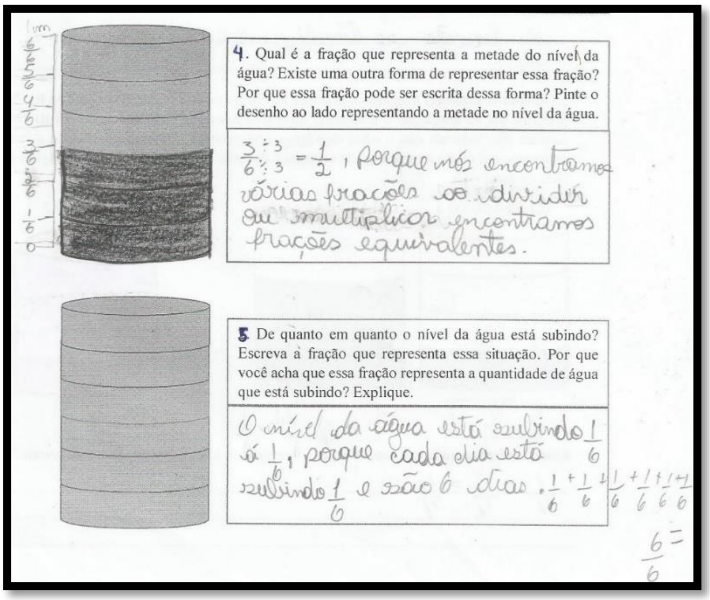


Fonte: acervo da pesquisa

Na questão 3, estudante apresenta ter se apropriado do conceito da adição de fração com denominadores iguais e o do inteiro, ao escrever corretamente a adição das frações que representa a quantidade de água está subindo a cada dia e após quatro dias, que é o inteiro.

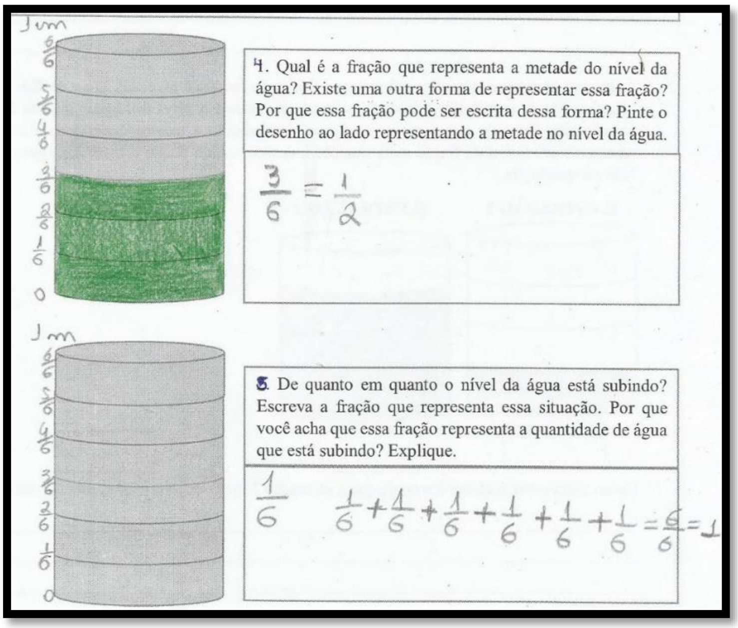
Para a questões 4 e 5, todos os alunos responderam de forma correta. Entretanto, parte dos alunos explicaram o motivo de suas respostas e outra parte apenas a apresentou numericamente, tal como mostra as figuras 81 e 82:

Figura 81 - Resposta questão 4: explorando as cheias do Rio Nilo



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 82 - Resposta questão 5: explorando as cheias do Rio Nilo



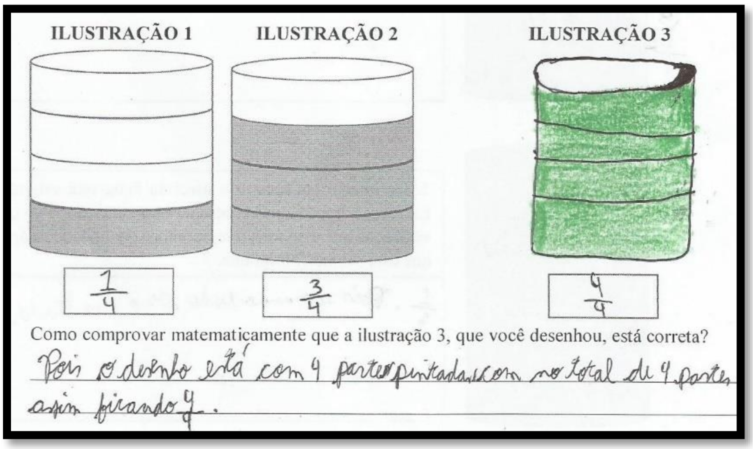
Fonte: acervo da pesquisa

É possível perceber que os estudantes apresentaram facilidade para com a representação geométrica e numérica de fração, adição de fração com denominadores iguais e sobre frações equivalentes. Além disso, por mais que parte dos estudantes não tenham explicado as suas soluções, estes também se mostraram ter compreendido a como somar frações com denominadores iguais, a representar frações e estabelecer frações equivalentes.

Em relação as questões 6, 7 e 8 os estudantes representaram, em forma de fração, as subdivisões. Posteriormente, identificaram a fração de um terço na representação geométrica e a indicaram na subdivisão. Além disso, afirmaram que as frações, na subdivisão, representam os espaços entre os números 0, 1 e 2. Portanto, não os estudantes não demonstraram dificuldade em determinar as frações que representam as subdivisões dadas nos exercícios.

Para a questão 9, a seguinte resposta foi evidenciada:

Figura 83 - Resposta para a questão 9 envolvendo as cheias do Rio Nilo



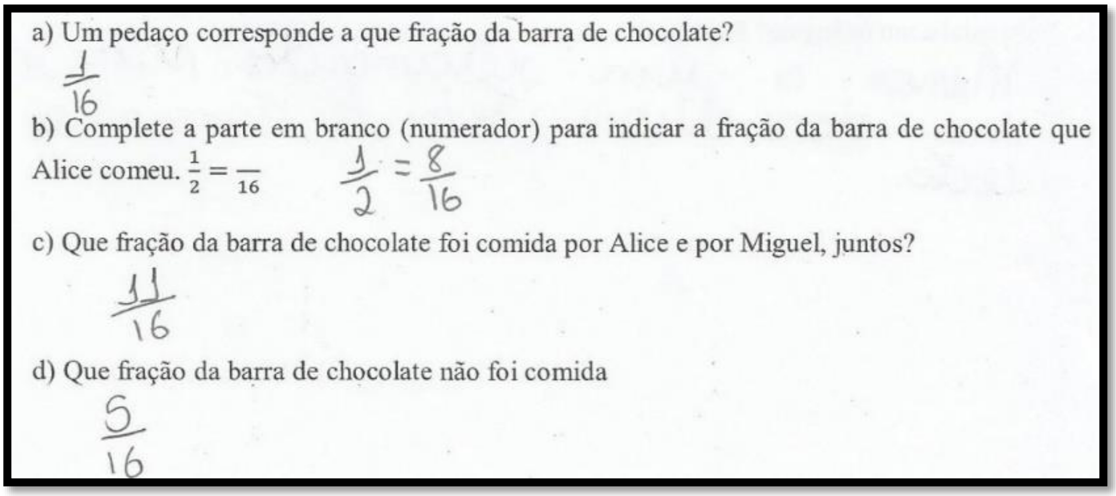
Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 83, o estudante fez uma representação geométrica da fração quatro quartos e indicou, corretamente, as frações da primeira e segunda figura. Ao comprovar que a ilustração está correta, este aluno escreveu que os desenhos estão com quatro partes pintadas e que, no total, o desenho possui quatro subdivisões. Sendo assim, indica a fração quatro quartos como a resposta para a questão. Dessa forma, é notório que o estudante se apropriou do conceito de adição de fração com denominadores iguais, sendo o número 4 (quatro) indicado como o valor total e os numeradores somados, resultando no número 4 (quatro), por fim resultando na fração quatro quartos.

Em relação a atividade “explorando as frações com a barra de chocolate”, os estudantes não apresentaram dúvidas sobre como resolver as questões. Dessa forma, ao analisar os dados, percebeu-se que todos os estudantes acertaram as respostas. Além disso, foi possível identificar duas formas de resolução: forma direta, e o que nomearei como forma explicativa.

Sobre a forma direta, os estudantes apresentaram apenas as respostas finais das questões, tal como mostra a figura 84:

Figura 84 - Resposta direta para "explorando as frações com a barra de chocolate"


a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?

$\frac{1}{16}$

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu. $\frac{1}{2} = \frac{\ }{16}$ $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

$\frac{11}{16}$

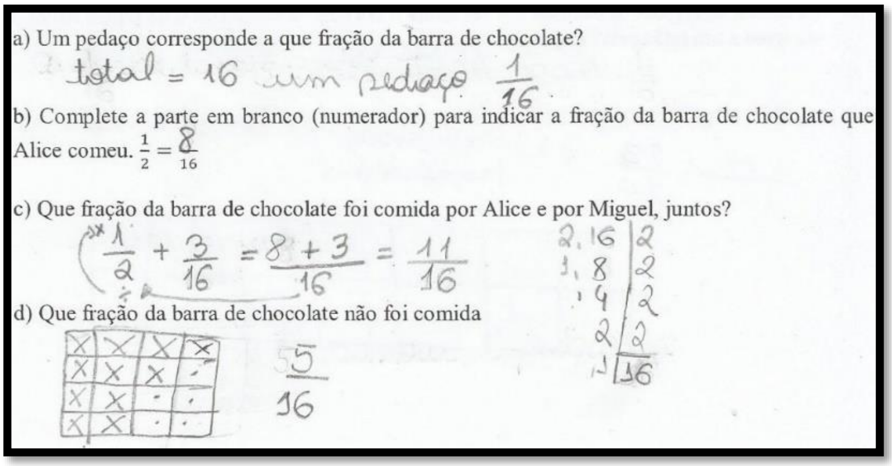
d) Que fração da barra de chocolate não foi comida

$\frac{5}{16}$

Fonte: acervo da pesquisa

Já a forma explicativa, os estudantes escreviam todos os cálculos até obter a resposta final, tal como mostra a figura 85:

Figura 85 - Resposta explicativa para "explorando as frações com a barra de chocolate"


a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?

total = 16 um pedaço $\frac{1}{16}$

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu. $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

$\frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{8+3}{16} = \frac{11}{16}$

d) Que fração da barra de chocolate não foi comida

$\frac{5}{16}$

Fonte: acervo da pesquisa

Ambas as formas de resolução estão corretas. Entende-se que no primeiro caso**,** a resposta direta, diz respeito a forma de resolução dos cálculos, que pode ter sido de realizado mentalmente. Já no segundo caso, houve a necessidade de escrever no papel todo o processo até a obtenção das respostas. Nos dois casos, pela Teoria Histórico-cultural, houve o desenvolvimento de signos, que agem internamente no sujeito de forma que, quando visualizam determinado problema, compreendem exatamente o que deve ser feito.

Aula 2

A segunda aula da 4ª ação de aprendizagem, ocorreu dia 02/12/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 31 (trinta e um) alunos.

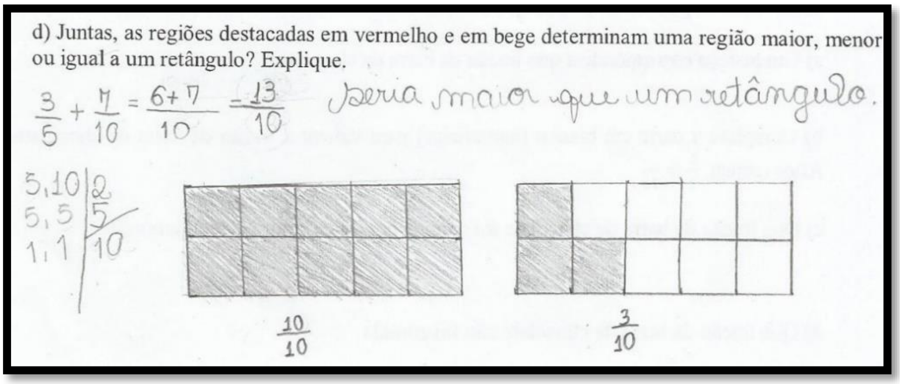
Novamente, foi solicitado aos estudantes a formação dos grupos. Em seguida a tarefa “explorando as frações no retângulo” foi entregue a cada estudante.

Durante a realização da atividade em sala de aula e na análise dos dados, percebeu-se que os grupos demonstraram facilidade em determinar frações equivalentes para as frações presentes nas questões “a”, “b” e “c”. Entretanto, parte dos estudantes apresentaram dificuldade na questão “d”, ou seja, se as regiões vermelha e bege juntas determina uma região maior, menor ou igual a um retângulo.

- **Evidenciando a categoria de análise:** mediação/ comunicação compartilhada/ interação

Diante dessa problemática, houve a necessidade da mediação da pesquisadora. Dessa forma foi esclarecido aos estudantes que eles deveriam somar a fração que representa a região vermelha com a fração que representa a região bege e, a partir disso, analisar o denominador e o numerador da fração obtida, a partir do que já compreendem sobre os seus significados. Além disso, foi pedido aos estudantes para que representassem geometricamente essa fração. As figuras 86, 87 e 88, ilustram uma amostra das respostas fornecidas, a partir do momento em que houve a mediação da pesquisadora.

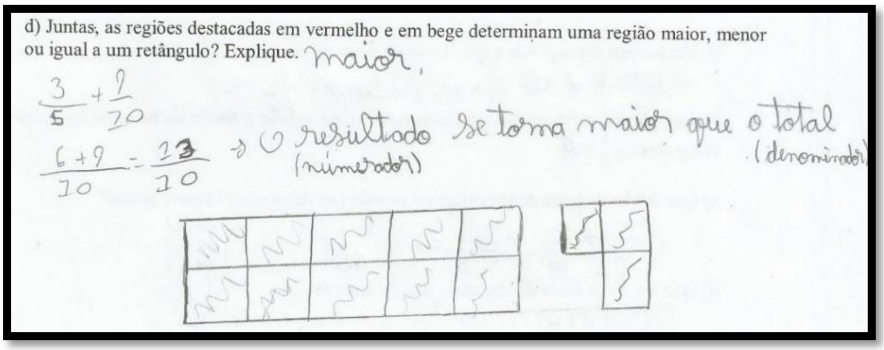
Figura 86 - Determinando uma região maior, menor ou igual a um retângulo - (1)



Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 86, o estudante determinou uma região maior que a de um retângulo. Dessa forma, essa região foi representada tanto numericamente, por meio da fração três décimos, quando geometricamente. Assim, é possível perceber a presença de uma ação mental de generalização teórica, em relação a representação geométrica de fração, pois o aluno compreendeu que o todo é representado pelo número 10 (dez) e generalizou esse entendimento para a parte excedente, que também deve representada pelo número 10 (dez), como o denominador, por se tratar do inteiro.

Figura 87 - Determinando uma região maior, menor ou igual a um retângulo - (2)


d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique. maior.

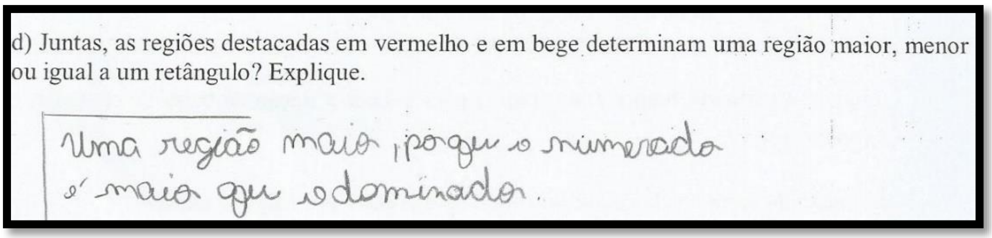
$\frac{3}{5} + \frac{9}{10}$

$\frac{6+9}{10} = \frac{23}{10}$ → o resultado (numerador) se torna maior que o total (denominador)

Fonte: acervo da pesquisa.

Já na figura 87, o estudante compreende que deve ser realizado um outro desenho a fim de representar a região excedente, entretanto, foi destacada apenas a parte que foi retirada do inteiro e esse inteiro não foi representado. Em contrapartida, se analisarmos com mais atenção os desenhos, é possível perceber que o estudante ilustrou, o que seria a fração três décimos, de forma simétrica a fração dez décimos. Além disso, o estudante escreveu que a região em bege mais a região em vermelho determinam uma região maior que a de um retângulo. Portanto, analisando esses dois pontos, este aluno pode ter desenvolvido a ação mental de generalização teórica, como no caso anterior.

Figura 88 - Determinando uma região maior, menor ou igual a um retângulo - (3)


d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

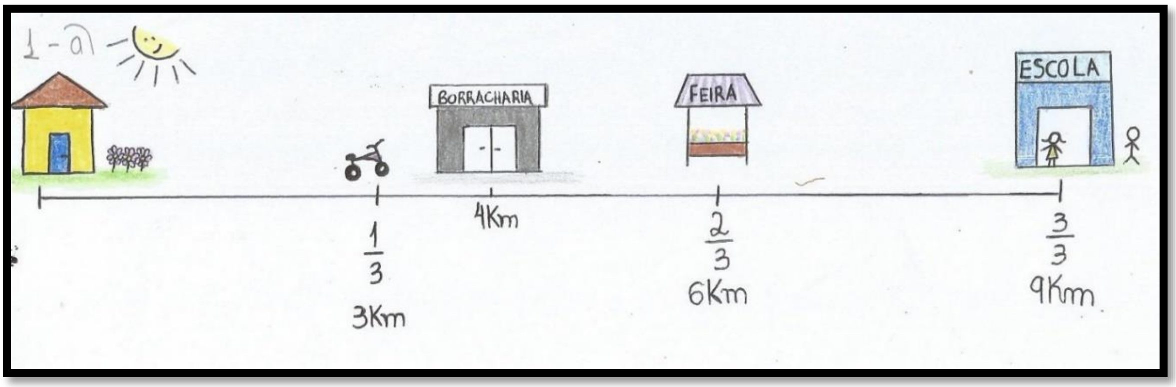
Uma região maior, porque o numerador é maior que o dominador.

Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 88, o estudante escreve que a região é maior porque o numerador, da fração obtida ao somar as duas regiões, é maior que o denominador. Diferentemente dos casos anteriores, este aluno não realizou a operação de adição e não representou geometricamente esse caso, sendo possível considerar que os cálculos foram realizados mentalmente. Pela resposta do estudante, este aluno pode ter desenvolvido a ação mental de generalização teórica, como nos casos anteriores, pois estabeleceu um modo de pensar sobre o objeto, que é quando o numerador é maior que o denominador será obtido uma região maior que a do inteiro.

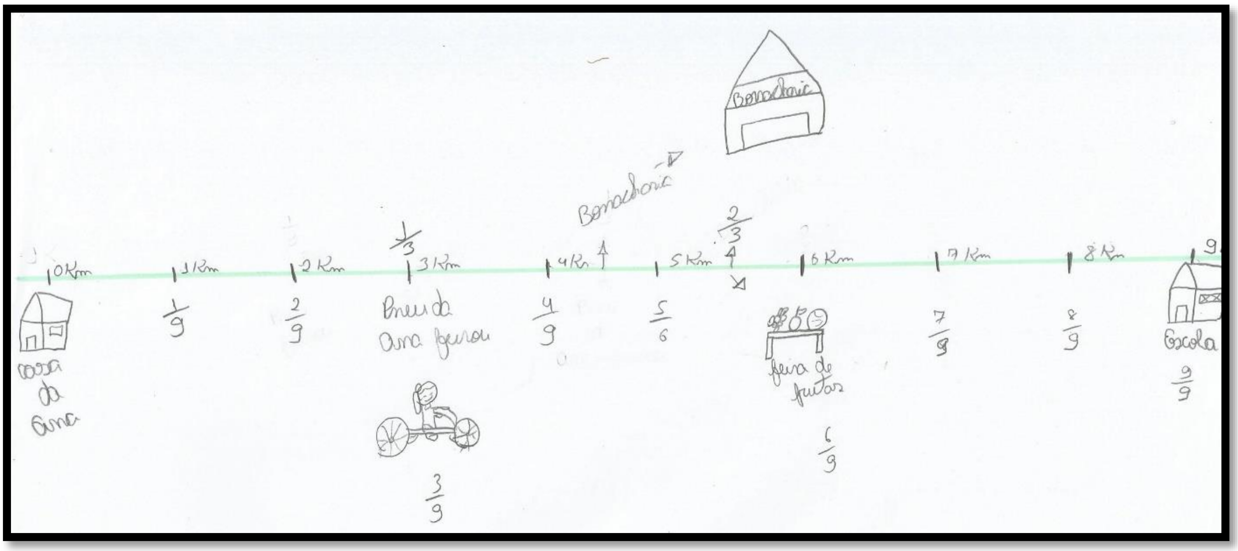
Em relação a atividade “explorando as frações no caminho para a escola”, os estudantes não apresentaram dificuldades. Sendo assim, a seguir serão apresentadas, por meio das figuras 89, 90 e 91, as respostas para a primeira questão.

Figura 89 - Explorando as frações no caminho para a escola (1)



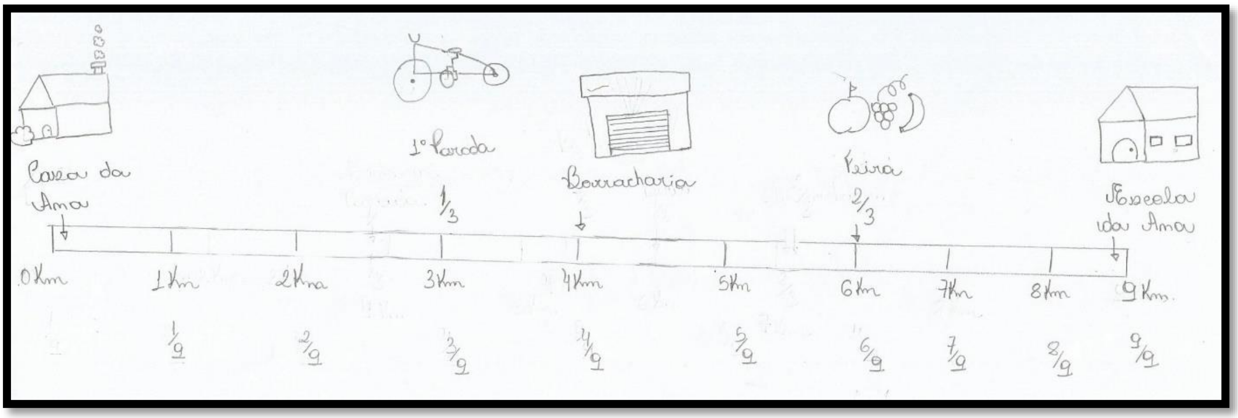
Fonte: acervo da pesquisa.

Figura 90 - Explorando as frações no caminho para a escola (2)



Fonte: acervo da pesquisa

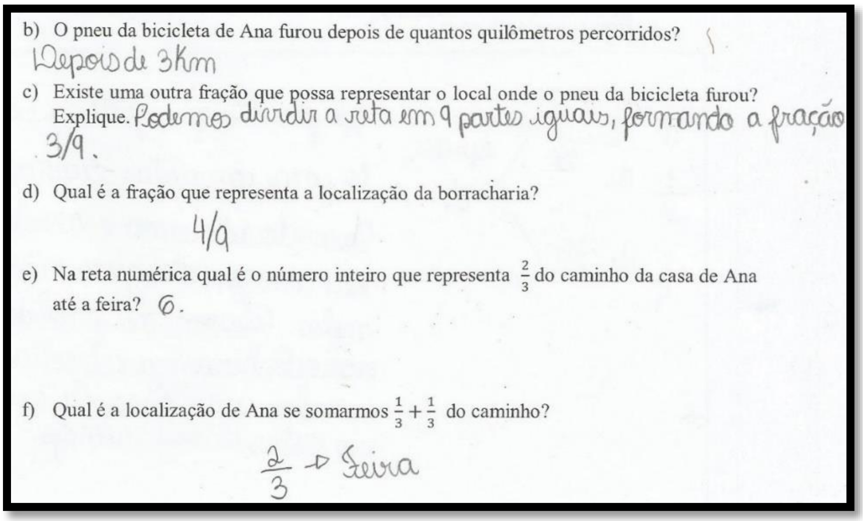
Figura 91 - Explorando as frações no caminho para a escola (3)



Fonte: acervo da pesquisa

Sobre as questões "b", "c", "d", "e", "f", todos estudantes as responderam corretamente. Dessa forma, a figura 92 é uma amostra dos dados obtidos:

Figura 92 - Explorando as frações no caminho para a escola (a, b, c, d, e, f)



b) O pneu da bicicleta de Ana furou depois de quantos quilômetros percorridos?
Depois de 3Km

c) Existe uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta furou? Explique. Podemos dividir a reta em 9 partes iguais, formando a fração 3/9.

d) Qual é a fração que representa a localização da borracharia?
4/9

e) Na reta numérica qual é o número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do caminho da casa de Ana até a feira? 6.

f) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ do caminho?
$\frac{2}{3}$ ⇾ Feira

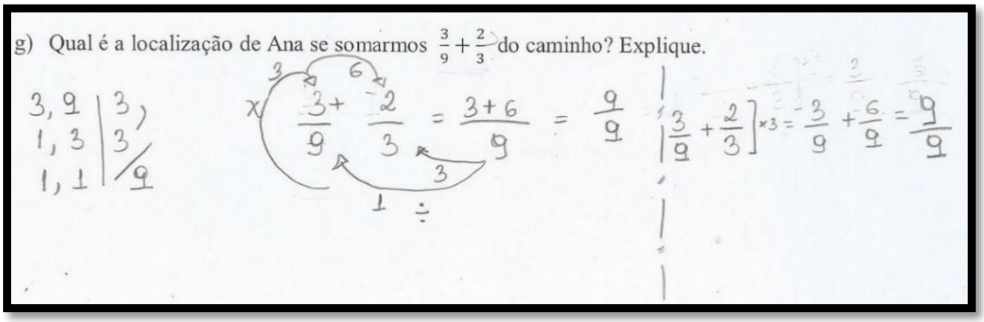
Fonte: acervo da pesquisa

De acordo com as figuras 89, 90, 91 e 92, é possível perceber que os estudantes se apropriaram do significado do numerador e denominador de uma fração ao representar o problema por meio do desenho, por exemplo, ao mencionar que a feira se localiza a dois terços do caminho. Além disso, ao relacionarem essa fração com a feira, na letra f, indica a compreensão dos estudantes para com a adição de fração com denominadores iguais. Por fim, a relação estabelecida entre as frações de um terço e a fração três nonos, na letra c, denota que os alunos entendem essas frações como equivalentes.

Em relação a última questão, sendo a letra "g", que se refere a adição de fração com denominadores diferentes, foi possível identificar três tipos de respostas: O uso do mínimo múltiplo comum e o uso do modelo que expressa a relação geral, apenas o uso do mínimo múltiplo comum, e somente o modelo da relação geral. Essas respostas mostram como os alunos compreendem adição de fração com denominadores diferentes.

A figura 93, ilustra o primeiro caso:

Figura 93 - Explorando as frações no caminho para a escola (letra g) (1)

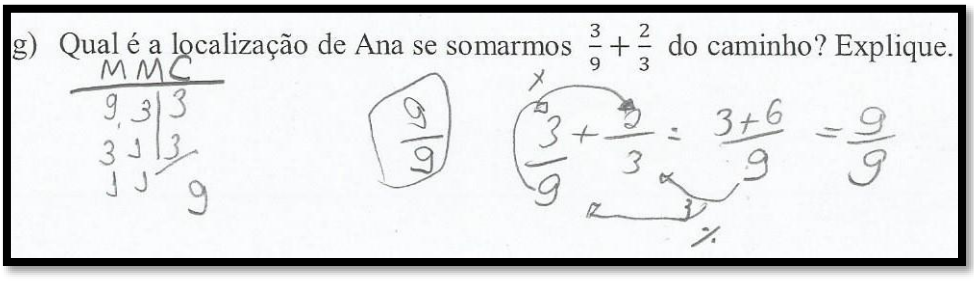


Fonte: acervo da pesquisa

A figura 93, mostra que o estudante utilizou o método do mínimo múltiplo comum e, além disso, o modelo que expressa a relação geral. Ambos os casos se mostram corretos, o que pode indicar que a ação mental de generalização teórica foi desenvolvida neste estudante, que pode ter se apropriado do fato de que o mínimo múltiplo comum é um método para obter frações equivalentes quando se quer realizar a operação de adição para quando os denominadores não são iguais.

A figura 94, ilustra o segundo caso:

Figura 94 - Explorando as frações no caminho para a escola (letra g) (2)

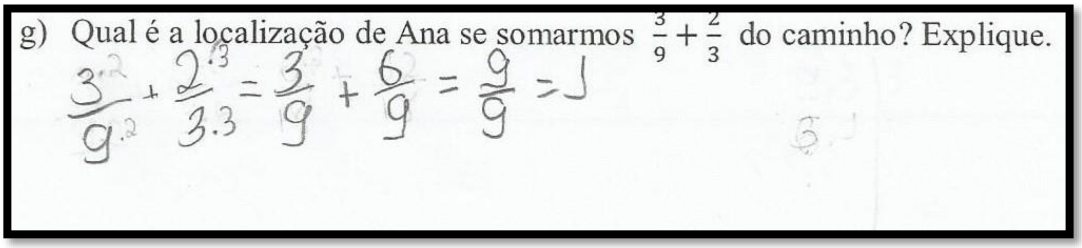


Fonte: acervo da pesquisa

A figura 94, mostra a utilização do mínimo múltiplo comum para somar as frações, o que pode indicar ou não a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, a depender do fato de o aluno ter encontrado a relação geral do objeto e estabelecido um modo de pensar e agir sobre esse objeto a partir da relação geral.

A figura 95, ilustra o terceiro caso:

Figura 95 - Explorando as frações no caminho para a escola (letra g) (3)


g) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{3}{9} + \frac{2}{3}$ do caminho? Explique.

$\frac{3^{\cdot 2}}{9^{\cdot 2}} + \frac{2^{\cdot 3}}{3.3} = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{9}{9} => 1$

Fonte: acervo da pesquisa.

A figura 95, ilustra a utilização do modelo da relação geral para a obtenção de frações equivalentes a fim de realizar a operação de adição de fração, o que pode indicar a formação de uma ação mental de abstração teórica, pois o estudante foi ao encontro da essência do conceito.

Nesta quarta tarefa de aprendizagem, objetivou trabalhar as unidades conceituais de adição de fração, equivalência de fração e inteiro, em situações particulares (contextualizadas). Sendo assim, Freitas (2016) afirma que, quando o estudante identifica a relação geral do objeto, estabelece um modelo que representa essa relação geral e aplica em situações particulares, indica a formação do pensamento teórico.

Diante disso, sabe-se que parte do estudantes identificaram nas tarefas anteriores a relação geral da adição de fração (ação mental de abstração teórica), estabeleceram o modelo dessa relação geral (ação mental de generalização teórica) e, agora, aplicaram em situações contextualizadas, o que pode indicar a formação do pensamento teórico em parte desses estudantes.

Já outros estudantes permaneceram com a formação de ações mentais de abstração teórica e a ação mental de generalização teórica ainda não foi desenvolvida. Dessa forma, considera-se que, para esses estudantes, é necessário haver mais trocas de experiências entre os alunos mais experientes a fim de amadurecer essas funções que ainda permanecem em estado embrionário, localizadas na zona de desenvolvimento proximal.

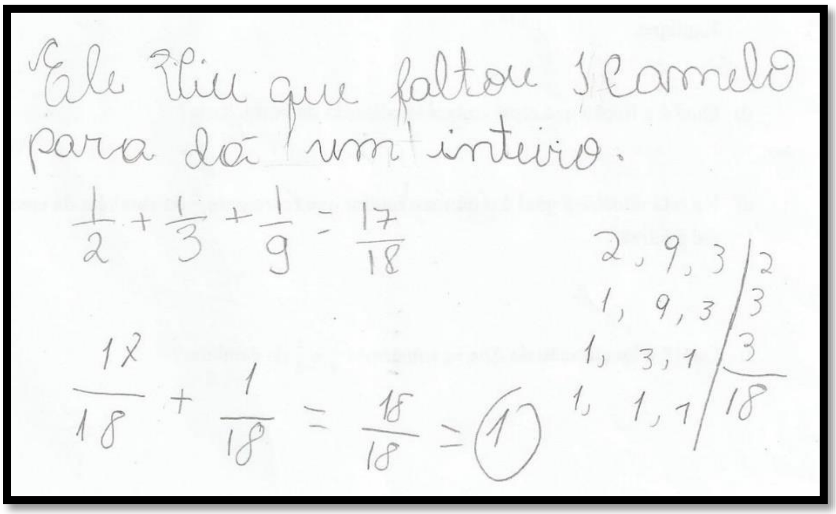
Por fim, ainda é possível constatar que, mesmo estando na quarta ação de aprendizagem ainda há alunos que permanecem desenvolvendo as ações mentais da primeira da ação. Esses estudantes, para o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, ainda não haviam relacionado o método do mínimo múltiplo comum às frações equivalentes, ou seja, não identificaram a relação geral do conceito. Como no caso anterior, é necessário mais trocas de experiências a fim de amadurecer as ações mentais que, neste caso, são abstrações empíricas, para ações mentais de abstração teórica e, em seguida, desenvolver a ação mental de generalização teórica, onde as junção dessas duas ações mentais viriam a formar o pensamento teórico desses estudantes.

4.2.8 Tarefa 8: Verificando a apropriação das unidades conceituais

A tarefa 8, desta 5ª ação de aprendizagem, ocorreu dia 03/12/2019, tendo uma duração de 50 (cinquenta) minutos, e estavam presentes 30 (trinta) alunos. Assim, foi solicitado aos estudantes a formação dos grupos. Em seguida, foi pedido à eles para que voltassem ao “Problema dos Camelos”, a fim de resolvê-lo e, posteriormente, realizassem, individualmente, uma avaliação de si próprios.

Sendo assim, as figuras mostram a predominância das respostas dos alunos, após terem passado pelas ações de aprendizagem que visam a formação do pensamento teórico pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, segundo Davydov (1988).

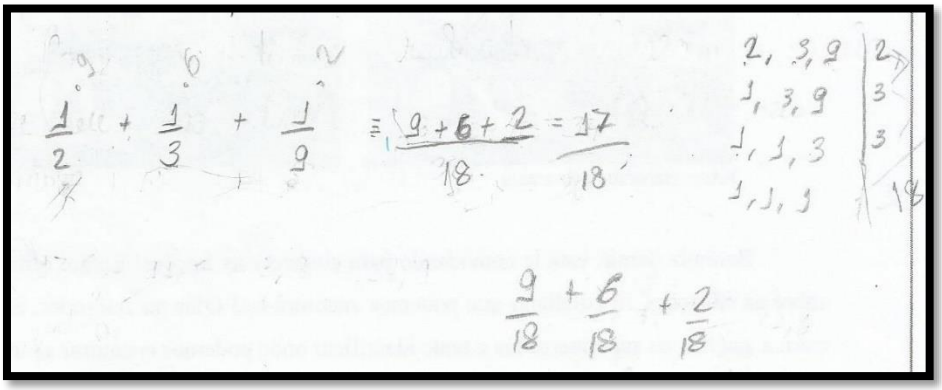
Figura 96 - Resolução do "Problema dos Camelos" (1)



Fonte: acervo da pesquisa

A figura 96, mostra que o estudante conseguiu resolver o “Problema dos Camelos”, e utilizou o método do mínimo múltiplo comum para somar as frações. Ao obter a fração um dezoito avos, o estudante está indicando o que falta para resultar em valor inteiro, ou seja, esse valor seria a sobra de um camelo que foi dado a Beremiz Samir, no final da história.

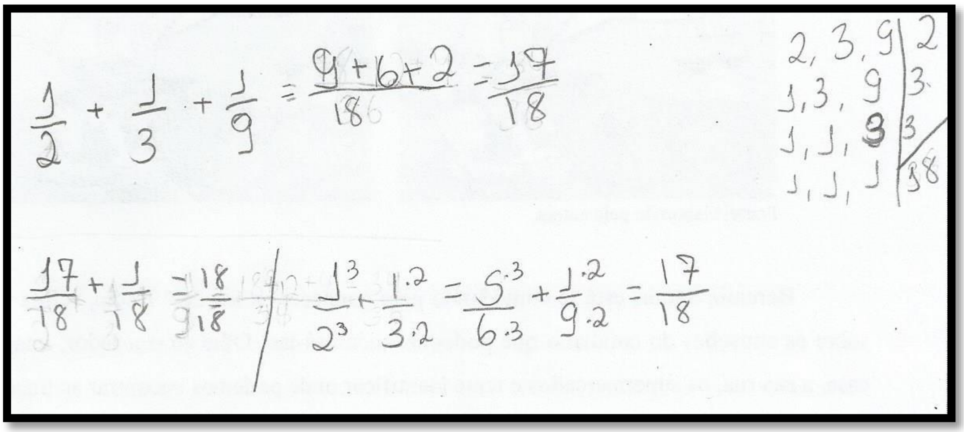
Figura 97 - Resolução do "Problema dos Camelos" (2)



Fonte: acervo da pesquisa

A figura 97, mostra os cálculos realizados pelo estudante, sendo possível identificar a utilização do método do mínimo múltiplo comum e o modelo para a obtenção de frações equivalentes, ao escrever os números 9, 6 e 2 acima dos numeradores das frações. Diferentemente da resposta anterior, este aluno não explicou a o que significa a fração dezessete dezoito avos, o que pode considerar que o estudante, a partir do que foi ilustrado na figura, não identificou a essência do problema.

Figura 98 - Resolução do "Problema dos Camelos" (3)



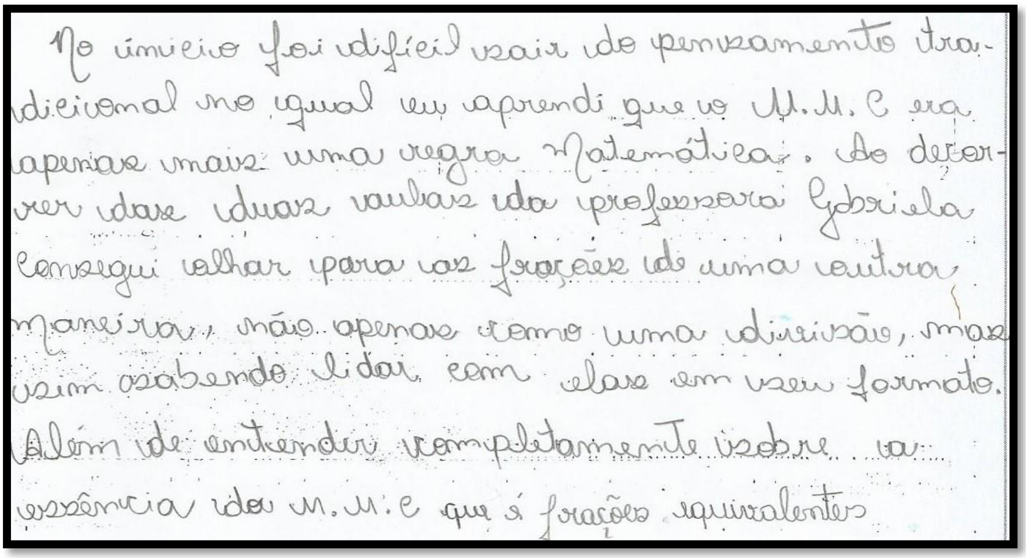
Fonte: acervo da pesquisa

A figura 98, ilustra a resposta de um aluno que utilizou o método do mínimo múltiplo comum e o modelo para a obtenção de frações equivalentes. Sobre a resolução do problema, o estudante não explicou de forma escrita, como no primeiro caso, mas é possível perceber que este compreende o significado da fração dezessete dezoito avos. Nesse sentido, é indicado na figura que falta um dezoito avos de camelo para resultar no inteiro e que o valor 1 (um) do denominador, seria o camelo dado a Baremiz Samir.

Diante dessas respostas é possível identificar, após a realização das tarefas de aprendizagem do experimento de ensino, a evolução dos estudantes em relação ao "Problema dos Camelos". Durante a resolução do problema, falas como: "Agora está fácil resolver o problema", "Como não consegui resolver esse problema antes?", foram ouvidas. Isso pode indicar uma contribuição do experimento de ensino, que é o fato de possibilitar a apropriação do conceito do objeto em seu aspecto abstrato (identificar a essência do conceito) e concreto (aplicar o modelo da essência em situações particulares/contextualizadas).

Sobre a avaliação da aprendizagem de si próprios, que podem ser vistas nas figuras, foram escolhidas as respostas que predominaram, cujas avaliações representam as demais que não foram colocadas neste trabalho.

Figura 99 - Avaliação 1

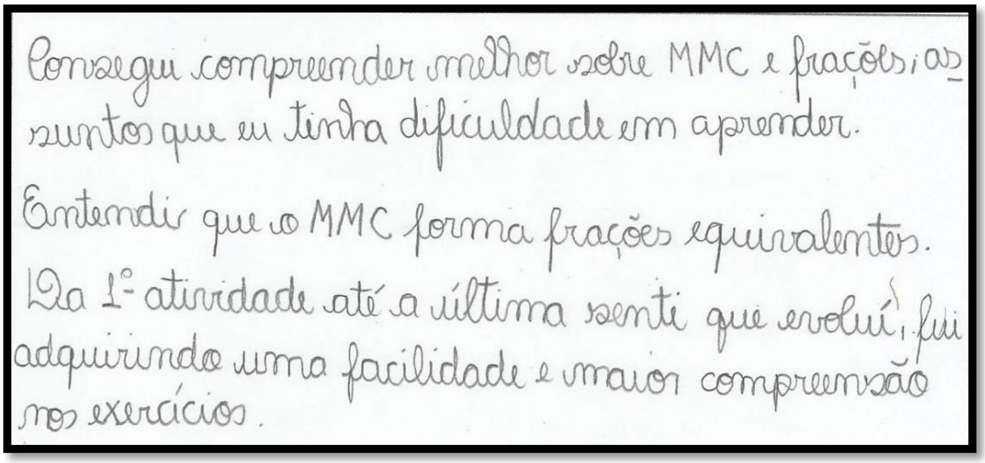


No início foi difícil sair do pensamento tra-
dicional no qual eu aprendi que o M.M.C era
apenas mais uma regra Matemática. Ao decor-
rer das duas aulas da professora Gabriela
consegui olhar para as frações de uma outra
maneira, não apenas como uma divisão, mas
sim sabendo lidar com elas em seu formato.
Além de entender completamente sobre a
essência do M.M.C que é frações equivalentes

Fonte: acervo da pesquisa

A figura 99, indica a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, neste estudante, ao mencionar a equivalência de fração como a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, e ao relacionar o método do mínimo múltiplo comum como um modelo para o estabelecimento de frações equivalentes. Nesse sentindo, podemos considerar que houve a formação de ações mentais que caracterizam o pensamento teórico.

Figura 100 - Avaliação 2

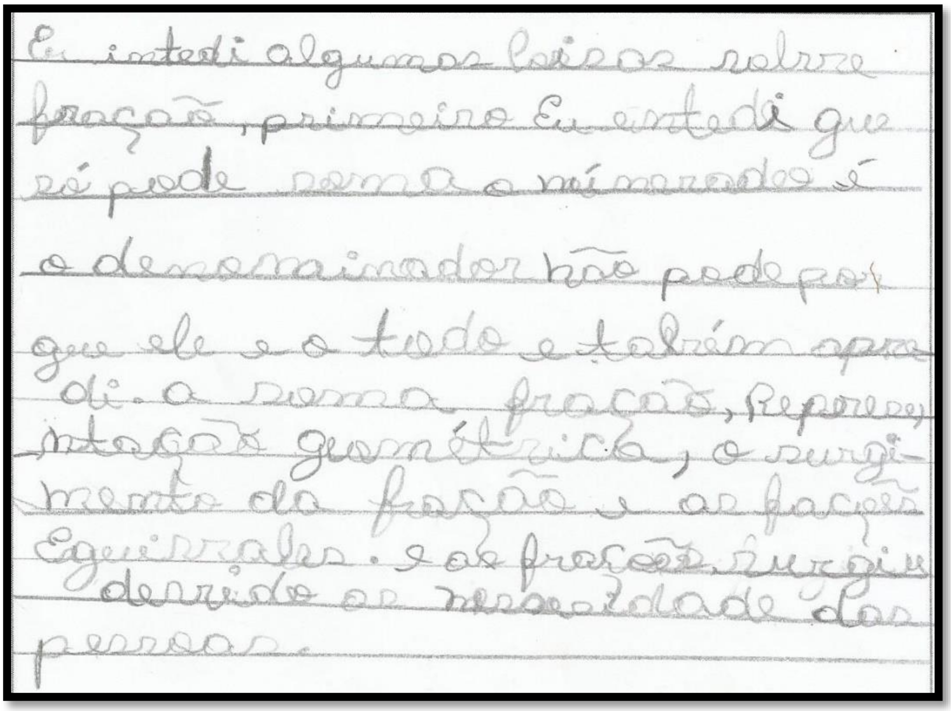


Consegui compreender melhor sobre MMC e frações; os suntos que eu tinha dificuldade em aprender.
Entendi que o MMC forma frações equivalentes.
Da 1ª atividade até a última senti que evoluí, fui adquirindo uma facilidade e maior compreensão nos exercícios.

Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 100, mostra a resposta de um aluno, que é semelhante a anterior. Aqui menciona que identificou a relação geral do objeto adição de fração com denominadores diferentes, e se apropriou da essência do mínimo múltiplo comum, que é a obtenção de fração equivalentes. Dessa forma, considera-se que houve a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, que caracterizam o pensamento teórico.

Figura 101 - Avaliação 3

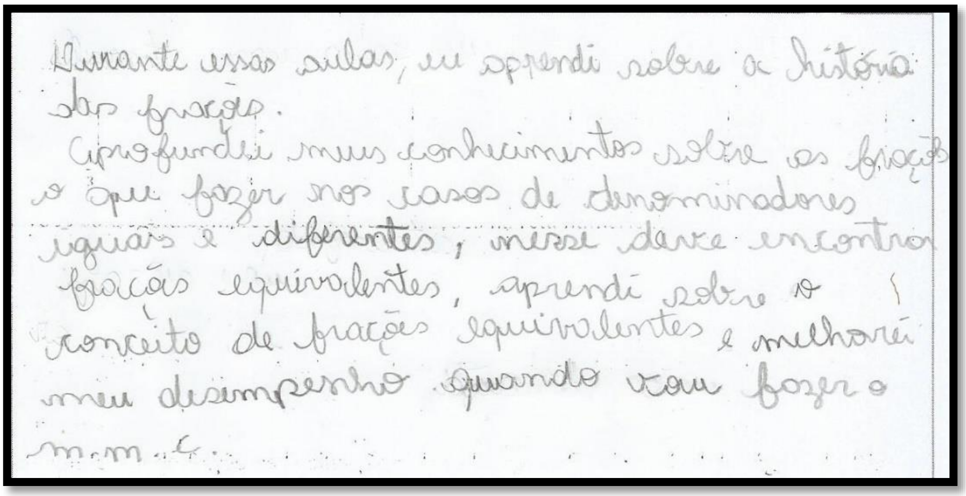


Eu entedi algumas coisas sobre fração, primeiro Eu entedi que só pode soma o númerador é o denominador não pode por que ele é o todo e tabém apren di a soma fração, Represen tação geométrica, o surgi mento da fração e as fraçõ Equivales. e as frações surgiu devido as nessesidade das pessoas.

Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 101, o estudante apresenta ter formado as ações mentais de abstração e generalização teórica em relação ao conceito de adição de fração com denominadores iguais, ao mencionar que não se deve somar os denominadores, por representar o todo, e ao generalizar o conceito ao obter um modo geral de pensar sobre esse objeto, que é o fato de não somar os denominadores mas, somar apenas os numeradores das frações. A avaliação deste aluno em relação ao conceito de adição de fração com denominadores diferentes, não foi abordada pelo estudante. Sendo assim, apenas segue descrevendo que conseguiu compreender as frações equivalentes, a representação geométrica de fração e, por fim, o surgimento do conceito de fração devido a uma necessidade humana. Isso nos leva a entender que o pensamento deste estudante para com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes permaneceu apenas nas ações mentais de abstrações empíricas, que caracteriza o pensamento empírico.

Figura 102 - Avaliação 4


Durante essas aulas, eu aprendi sobre a história
das frações.
Aprofundei meus conhecimentos sobre as frações
o que fazer nos casos de denominadores
iguais e diferentes, nesse deve encontrar
frações equivalentes, aprendi sobre o
conceito de frações equivalentes e melhorei
meu desempenho quando vou fazer o
m.m.c.

Fonte: acervo da pesquisa

Na figura 102, é possível identificar a formação da ação mental de abstração teórica, pois o estudante identificou a essência do conceito de adição de fração com denominadores diferentes. Em contrapartida não relacionou o método do mínimo múltiplo comum às frações equivalentes, o que subentende-se que não houve a formação de ações mentais de generalização teórica, o que caracterizaria a formação do pensamento teórico. Portanto, compreende-se que o conceito de adição de fração com denominadores diferentes apresenta-se em sua forma embrionária, localizado na zona de desenvolvimento proximal do aluno. Sendo assim, é necessário mais trocas de experiências entre os estudantes a fim de que esse conhecimento, que está localizado na zona de desenvolvimento proximal, se direcione para a zona de desenvolvimento real desse estudante.

A seguir, será realizada uma avaliação qualitativa da aprendizagem dos alunos

4.3 Avaliando a aprendizagem

O experimento de ensino elaborado teve como objetivo a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração e, dessa forma, identificar as suas contribuições. Sendo assim, tarefas de aprendizagem foram desenvolvidas a fim de que contribuíssem para o desenvolvimento de ações mentais de abstração e generalização que teórica, sendo estas características do pensamento teórico.

Em relação à primeira tarefa de aprendizagem, foi trabalhada a unidade conceitual de adição de fração com denominadores diferentes, buscando identificar como esses alunos entendem o seu conceito. Assim, por meio da realização das tarefas de aprendizagem, a partir dos gestos, falas e ações, dados foram obtidos, sendo estes distribuídos em categorias de análise. Dessa forma, as categorias de análise evidenciadas, nessa tarefa, foram: mediação/ comunicação compartilhada/ interação, pensamento empírico e pensamento teórico, atividade de estudo e zona de desenvolvimento proximal. Portanto, ao analisar os dados, entende-se que os estudantes compreendiam a adição de fração de forma empírica, ou seja, se pautavam apenas nas características externas do objeto.

Na segunda tarefa de aprendizagem, foram trabalhadas as unidades conceituais de adição de fração com denominadores iguais e o inteiro, por meio da manipulação de uma barra de chocolate. Assim, dados foram obtidos, sendo distribuídos entre as seguintes categorias de análise evidenciadas: mediação/ comunicação compartilhada/ interação, pensamento empírico e pensamento teórico, e zona de desenvolvimento proximal. Diante disso, os dados apontam que houve a formação de uma ação mental que caracteriza o pensamento teórico, sendo esta a abstração teórica. Isso, portanto, pode ser considerado como uma das contribuições do experimento didático formativo elaborado, ou seja, que é a possibilidade de formação de ações mentais de abstração teórica.

A terceira tarefa de aprendizagem, visou, principalmente, trabalhar a identificação de frações equivalentes, além do conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações envolvendo o Tangram. Nesse sentido, as categorias de análise evidenciadas nessa tarefa, foram: mediação/ comunicação compartilhada/ interação, pensamento empírico e pensamento teórico, e zona de desenvolvimento proximal. Por meio da observação dos estudantes e ao analisar os dados, considerou-se que houve a formação de uma ação mental de abstração empírica em relação as frações equivalentes. Entretanto, vimos esse fato como um ponto de partida para a formação das abstrações e generalizações teóricas, que foram promovidas na atividade de estudos nas ações de aprendizagem seguintes.

Por fim, a quarta tarefa de aprendizagem, dentro da primeira ação que visa o desenvolvimento do pensamento teórico pelo método dialético do abstrato ao concreto, consiste em identificar a relação geral da unidade conceitual adição de fração com denominadores diferentes. Sendo assim, foi evidenciada a categoria de análise mediação/ comunicação/ interação, sendo possível a identificação da relação geral do objeto de estudo, tendo a mediação como base para esse fim. É evidente que parte dos alunos não identificaram a relação, sendo esta percebida nas ações de aprendizagem seguintes. Portanto, mais uma contribuição do experimento de ensino pode evidenciada, que é a possibilidade de ir ao encontro da essência do conceito do objeto de estudo.

A quinta tarefa de aprendizagem, teve como objetivo principal desenvolver um modelo da relação geral do objeto. Dessa forma, foi estabelecido um modo geral de pensar sobre frações equivalentes, sendo esta a essência do conceito de adição de fração com denominadores diferentes. Assim, dados foram obtidos e distribuídos entre as categorias de análise, sendo evidenciadas as seguintes: atividade de estudo, mediação/ comunicação compartilhada, zona de desenvolvimento proximal, pensamento empírico/ pensamento teórico. Ao final desta tarefa, notou-se a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica para com o conceito de frações equivalentes ao se estabelecer um modelo de como obtê-las, diferentemente da quarta tarefa de aprendizagem em que apenas houve a identificação visual de frações equivalentes, prevalecendo ações mentais no campo empírico.

Além disso, compreendemos que os estudantes ainda não haviam relacionado concretamente as frações equivalentes ao mínimo múltiplo comum, ou seja, que este é um método para obter frações equivalentes e assim possibilitar a operação de adição para quando os denominadores não são iguais. Especificamente, até este momento, em relação a adição de fração com denominadores diferentes, formaram-se em parte dos estudantes, ações mentais de abstração teórica, pois foi identificada a sua relação geral, o seu núcleo, a sua essência, que é a equivalência de fração. Além disso, foi formada a ação mental de generalização teórica, que consiste em criar um modo de pensar e agir sobre o objeto, que é por meio de frações equivalentes, ao dividir ou multiplicar o denominador e o numerador das frações por um mesmo valor. Entretanto, os estudantes ainda não se apropriaram do fato de que, quando se utiliza o mínimo múltiplo comum, na verdade, estamos obtendo frações equivalentes, ou seja, ainda não houve uma generalização teórica do mínimo múltiplo comum para o conceito de frações equivalentes.

A sexta tarefa de aprendizagem, consistia em descaracterizar o objeto de estudo, ou seja, alterar a relação geral, a fim de reforçar a base genética do conceito de adição de fração com denominadores iguais e diferentes. Dessa forma, por meio da observação, diálogo e realização das tarefas de aprendizagem, até este momento, dados foram obtidos, categorizados e analisados. Sendo assim, considerou-se que, por meio da categoria mediação/ comunicação compartilhada/ interação, pôde ser evidenciado a formação de abstração e generalização teórica para com o conceito dos objetos de estudo.

Em contrapartida, houveram alunos que ainda não haviam identificado a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, que é equivalência de fração e, por consequência, não relacionaram esse tipo de fração com método do mínimo múltiplo comum, o que implica que o conhecimento para esse estudantes permaneceu no campo empírico. Entretanto, o processo de ensino e aprendizagem não ocorre de forma linear para todos, ou seja, cada sujeito se apropria de um determinado conhecimento a depender da maturação das funções que estão em seu estado embrionário, localizadas na zona de desenvolvimento proximal.

A sétima tarefa de aprendizagem, buscou resolver situações particulares envolvendo as unidades conceituais de adição de fração, frações equivalentes e o inteiro. Analisando os dados notou-se que o experimento de ensino contribuiu para a identificação da relação geral do objeto (ação mental de abstração teórica) e para o estabelecimento do modelo da relação geral (ação mental de generalização teórica).

Ambas ações mentais caracterizam o pensamento teórico. Dessa forma, para esses estudantes que desenvolveram essas ações mentais e aplicaram a relação geral em situações particulares, tem-se que, segundo Freitas (2016), pode indicar que houve a formação do pensamento teórico nesses alunos.

Em contrapartida, para outros estudantes, o experimento de ensino elaborado contribuiu para a formação apenas da ação mental de abstração teórica, que significa identificar a essência do conceito de adição de fração com denominadores iguais. Para esses estudantes é necessário a troca de experiências a fim de atuar na zona de desenvolvimento proximal, para amadurecer as funções em estado embrionário e, assim, desenvolver as ações mentais de generalização teórica, que caracteriza o pensamento teórico.

Para outros alunos, a relação geral ainda não havia sido identificada, o que caracteriza, ainda, uma abstração mental empírica para com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes. Esses estudantes utilizavam-se do mínimo múltiplo comum e não relacionaram esse método como uma forma de obter frações equivalentes. Sendo assim, os dados, até aqui, mostram a heterogeneidade no processo de ensino e aprendizagem, pois cada estudante possui a sua forma e velocidade de aprendizagem (HEDEGAARD, 2013).

Portanto, podemos destacar as seguintes contribuições do experimento de ensino:

- Para a apropriação da relação geral do objeto adição de fração com denominadores iguais e diferentes;
- Para o estabelecimento de um modelo que representa a relação geral do objeto;
- Para a aplicação da relação geral do objeto adição de fração com denominadores iguais e diferentes, o conceito de fração equivalente e o inteiro em situações particulares;
- Para a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, que caracterizam o pensamento teórico;
- Para desenvolver a necessidade, o desejo, a motivação do aluno, contribuindo para entrar em atividade de estudo;
- Para atuar na zona de desenvolvimento proximal, resultando na internalização das funções que antes estavam em processo de amadurecimento;
- Para a troca de experiências, ou seja, por meio da comunicação compartilhada contribuiu para avançar com o desenvolvimento da atividade mental sobre o objeto, primeiro em um processo interpsicológico para depois em um processo intrapsicológico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ser professora de Matemática, para esta pesquisadora, sempre foi algo desafiador. Por esse motivo e pela necessidade e desejo de superar as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem, especialmente em relação ao conceito de adição de fração, originou-se a escrita desta dissertação. Dessa forma, vimos na Teoria Histórico-cultural de Vygotsky e na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, a possibilidade de um ensino voltado para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração, por resgatar a sua essência, o núcleo desse conceito, diferentemente da educação tradicional que evidencia apenas os aspectos exteriores, desenvolvendo, portanto, ações mentais que caracterizam o pensamento empírico.

Diante dessa problemática, o objetivo deste trabalho foi de identificar as contribuições de um experimento de ensino elaborado para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração. Sendo assim, tarefas de aprendizagem foram planejadas e desenvolvidas tendo como base o método dialético de ascensão do abstrato ao concreto, que consiste em identificar a essência, a relação geral do conceito de adição de fração, modelar essa relação geral e aplicá-la em situações particulares (contextualizadas). Isso, segundo Davydov (1988), possibilitaria a formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, que caracterizam o pensamento teórico.

Assim, o experimento de ensino elaborado, foi aplicado em uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de Goiânia, buscando responder a seguinte questão de investigação: Que contribuições um experimento de ensino sobre o conceito de adição de fração à luz da Teoria do Ensino Desenvolvimental pode trazer para a formação do pensamento teórico dos estudantes? Para responder a essa questão foram estabelecidas categorias de análise, que emergem da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental: atividade de estudo; zona de desenvolvimento proximal; pensamento empírico/ pensamento teórico e mediação/ comunicação compartilhada/ interação, cujos dados da pesquisa forma distribuídos entre estas, e analisados qualitativamente, buscando identificar as contribuições do experimento de ensino elaborado.

Em suma, as principais contribuições do experimento de ensino foi a possibilidade da formação de ações mentais de abstração e generalização teórica, que caracterizam o pensamento teórico; a atuação na zona de desenvolvimento proximal, por meio da mediação da pesquisadora, da comunicação compartilhada e interação entre os estudantes e o desenvolvimento da necessidade, desejo e motivação para entrar em atividade de estudo. Essas contribuições podem apontar o experimento de ensino elaborado, tendo como base a Teoria Histórico-cultural e a Teoria do Ensino Desenvolvimental, como uma possibilidade de inserção no ensino, por professores e professoras de matemática que objetivam a formação do pensamento teórico de seus estudantes.

De um lado podemos identificar as contribuições do experimento de ensino e, de outro, podemos identificar os desafios que a pesquisa trouxe para que se chegasse nessas contribuições. Um dos desafios encontrados foi de se apropriar da Teoria do Ensino Desenvolvimental e colocá-la em prática, ou seja, compreender a Teoria, que é abstrata, e conduzir esse conhecimento para o concreto, que seria desenvolver as tarefas de aprendizagem. Foi um trabalho árduo, demorado, que requereu meses de leitura e discussão com pessoas mais experientes em relação a Teoria do Ensino Desenvolvimental.

Outro desafio, agora este relacionado a aceitação, é de que cada estudante possui uma forma e uma velocidade de aprendizagem (HEDEGAARD, 2013). Planejei e desenvolvi o experimento de ensino buscando formar o pensamento teórico de todos os alunos, pois para mim, seria inaceitável ou seria uma falha de minha parte se caso algum aluno ainda permanecesse com a formação de ações mentais no campo empírico. Entretanto, no momento em que estava conversando a Teoria Histórico-cultural e a Teoria do Ensino Desenvolvimental com os dados da pesquisa e percebi, em alguns estudantes, que ainda havia pensamento empírico, lembrei-me da fala da professora da banca de qualificação do meu pré-projeto de pesquisa, de que não posso abraçar o mundo com as mãos. Dessa forma, compreendi, por meio da Teoria Histórico-cultural e da Teoria do Ensino Desenvolvimental, que esses estudantes podem estar com suas funções ou ações mentais em estado embrionário e, para o amadurecimento, seria necessário mais trocas de experiências, o que não foi possível devido ao tempo disponibilizado à mim pela professora da turma.

Nesse sentido, esta pesquisa contribuiu para descontruir meus pensamentos em relação ao processo de ensino e aprendizagem, pois este não ocorre de forma linear. Além disso, a Teoria do Ensino Desenvolvimental mudou a minha visão sobre como realmente deve ser um professor mediador, que seria aquele que elabora estratégias, instiga o estudante, promove discussões, dialoga, possibilita a autonomia do aluno para que este seja o próprio autor de sua aprendizagem. Por fim, uma outra contribuição a destacar é a ampliação de minha de visão sobre a necessidade de desenvolver outros estudos, agora, para o conceito de divisão de fração.

E é isso que eu espero com esta pesquisa, para que possa descontruir pensamentos, mudar a visão daquele ou daquela que fizer uso ou ampliar as informações aqui contidas. E para esse ou essa leitora, resumidamente, posso dizer que se hoje eu pudesse voltar no ano de 2017, para quando aquele aluno me perguntou: "Professora, por que devemos encontrar o MMC, dividi-lo pelo denominador e o resultado multiplicar pelo numerador da fração?", ao invés de responder que não sabia, teria dito ao aluno e, também, para toda a turma: "Hoje vocês irão reconstruir o caminho que os estudiosos percorreram para se chegar ao conceito de adição de fração. E, para isso, teremos como base a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov".

REFERÊNCIAS

AQUINO, J. P. G. **Frações:** uma abordagem pedagógica. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, Mossoró, 2013.

AQUINO, O. F. Didática e prática de ensino na relação com a formação de professores. In: FARIAS, I. M. S.; LIMA, M. S. L.; CAVALCANTE, M. M. D.; SALES, J. A. M. (Org.). **O experimento didático-formativo:** contribuições para a pesquisa em didática desenvolvimental. Fortaleza: EdUEC, 2015.

BAKHURST, D. A memória social no pensamento soviético. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 229-254.

BALLADARES, B. L. **Malba Tahan, matemática e histórias em quadrinhos:** Produção discente de HQs em uma colônia de pescadores. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

BRAGA, E. M.; DIAS, M. S. L. O desenvolvimento dos conceitos científicos e a valorização dos conceitos espontâneos no processo de aprendizagem do ensino superior. In: DIAS, M. S. L. (Org.). **Introdução às leituras de Lev Vygotski:** Debates e atualidades na pesquisa. Porto Alegre: Fi, 2019, p. 173-202.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 2002.

CARVALHO, E. S. **Sequência didática:** uma proposta para o ensino do conceito de fração. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

COLE, M.; SCRIBNER, S. Introdução**.** In: COLE, M.; JOHN-STEINER, V.; SCRIBNER, S.; SOUBERMAN, E. **A formação social da mente**: Vygotski, L. S. 4. ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1991, p. 7-15.

DANIELS, H. Introdução: A psicologia num mundo social. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 3-30.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental:** A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Moscú: Progreso, 1988.

ELHAMMOUMI, M. O Paradigma de Pesquisa Histórico-Cultural de Vygotsky: a Luta por uma Nova Psicologia. In: BARBOSA, M.V.; MILLER, S.; MELLO, S. A. (Org.). **Teoria Histórico-Cultural:** Questões Fundamentais para a Educação Escolar. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2016, p. 25-36.

EMERSON, C. O mundo exterior e o discurso interior: Bakhtin, Vygotsky e a internalização da língua. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 139-163.

FONSECA-JANES, C. R. X.; LIMA, E. A. Educação e Filosofia. **O processo de formação de conceitos na perspectiva vigotskiana**. **Revista da FAEEBA**, Salvador, v. 22, n. 39, p. 195-204, jan./jun. 2013.

FREITAS, R. M. M.; LIMONTA, S. V. A educação científica da criança: contribuições da teoria do ensino desenvolvimental**, Revista Linhas Críticas,** Brasília, v. 18, n. 35, p. 69-86, jan./abr. 2012.

FREITAS; ROSA, S. V. L. Ensino Desenvolvimental: contribuições à superação do dilema da didática, **Revista Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 613-627, abr./jun. 2015.

FREITAS, R. M. M. Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para a organização do ensino**, Revista Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 388-418, maio/ago. 2016.

GEBERT, A. B. Reflexões para exploração de conceitos espontâneos e científicos na prática pedagógica da primeira infância. In: DIAS, M. S. L. (Org.). **Introdução às leituras de Lev Vygotski:** Debates e atualidades na pesquisa. Porto Alegre: Fi, 2019, p. 203-222.

HEDEGAARD, M. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 199-227.

HOLZMAN, L. H. Pragmatismo e materialismo dialético no desenvolvimento da linguagem. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 83-109.

KOZULIN, A. O conceito de atividade na psicologia soviética: Vygotsky, seus discípulos, seus críticos. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 111-137.

LIBÂNEO, J. C. **Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa:** unindo ensino e modos de investigação. Cadernos de Pedagogia Universitária, 2009.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico-cientifico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. 3. ed. Uberlândia: EDUFU, 2013, p. 331-366.

LIBÂNEO, J. C. A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino**, Revista Educativa,** Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

LURIA, A. R. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2010.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. **Revista Bolema,** Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 23-40, 2012.

MARTEN, G. H.; MINELLA, J. P. Qualidade da água em bacias hidrográficas rurais: um desafio atual para a sobrevivência futura. **Revista Agroecologia e Desenvolvimento Rural Sustentável**, Porto Alegre, v. 3, n. 4, p. 33-38, out/dez. 2002.

MARTINS, L. M. A Internalização de Signos como Intermediação entre a Psicologia Histórico Cultural e a Pedagogia Histórico-Crítica. In: BARBOSA, M.V.; MILLER, S.; MELLO, S. A. (Org.). **Teoria Histórico-Cultural:** Questões Fundamentais para a Educação Escolar. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2016, p. 102-124.

MINICK, N. O desenvolvimento do pensamento de Vygotsky: Uma introdução a Thinking and Speech. In: DANIELS, H. (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013, p. 31-59.

MORETTO, V. P. **Prova:** um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 8. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky aprendizado e desenvolvimento:** um processo sócio-histórico. 4 ed. São Paulo: Scipione, 1997.

PERES, T. C.; FREITAS, R. M. M. **Ensino Desenvolvimental: uma alternativa para a educação matemática**, Tubarão, Volume Especial, p. 10-28, Jan./Jun. 2014.

PRESTES, Z.; TUNES, E.; NASCIMENTO, R. Lev Semionovitch Vygotsky: um estudo da vida e da obra do criador da psicologia histórico-cultural. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. 3. ed. Uberlândia: EDUFU, 2013, p. 59-80.

REGO, T. C. **Vygotsky:** Uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.L.B.; BORTOLOSSI, H. J.; GIRALDO, V. A.; REZENDE, W. M.; QUINTANEIRO, W. S. **Frações no ensino fundamental**: volume 1. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS), 2017.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E; HOBOLD, E. S. F; BERNARDO, C. S.; CORRÊA, D. A.; INÁCIO, G. M. Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico Cultural**, REVEMAT,** Florianópolis, v. 8, n. edição especial, p. 227-245, 2013.

SANTOS, S. F. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019.

SOUSA, M. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie:** Revista de Didática e Psicologia Pedagógica, Uberlândia, v. 2, n. 1, p. 40-68, jan/abr. 2018.

TAHAN, M. **O homem que calculava.** 58 ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/arquivos/File/Problemas_matematicos/solucao_35_camelos.pdf> Acesso em: 04 ago. 2020.

VASCONCELOS, I. C. P. A compreensão das relações numéricas na aprendizagem de frações: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação básica. 2015. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: Vygotski, L. S. Tradução José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 4. ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução Paulo Bezerra. 2. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Produto educacional

Um Experimento de Ensino Formativo baseado na Teoria Do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração

Gabriela Silva Lemes

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

INSTITUTO FEDERAL
Goiás
Câmpus
Jataí

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIAS
CAMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS DE MATEMÁTICA

O PROBLEMA DOS CAMELOS:

Um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração

Gabriela Silva Lemes

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Produto educacional vinculado a dissertação:

A formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração: Um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov

JATAÍ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Lemes, Gabriela Silva.
O problema dos camelos: um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração: Produto Educacional vinculado à dissertação “A formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração: um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov” [manuscrito] / Gabriela Silva Lemes e Duelci Aparecido de Freitas Vaz. -- 2021.
91 f.; il.

Produto Educacional (Mestrado) – IFG – Campus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2021.
Bibliografia.

1. Teoria histórico-cultural. 2. Teoria do ensino desenvolvimental. 3. Adição de fração. 4. Experimento de ensino. 5. Ensino de Matemática. I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas. II. IFG, Campus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F050/2021/1.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ

GABRIELA SILVA LEMES

A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação para Ciências e Matemática, defendida e aprovada, em 19 de março de 2021, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz -** Presidente da banca / Orientador - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; **Profa. Dra. Arianny Grasielly Baião Malaquias -** Membro interno - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás e **Prof. Dr. Jamur André Venturin -** Membro externo - Universidade Federal do Tocantins. A sessão de defesa foi devidamente registrada em ata que depois de assinada foi arquivada no dossiê da aluna.

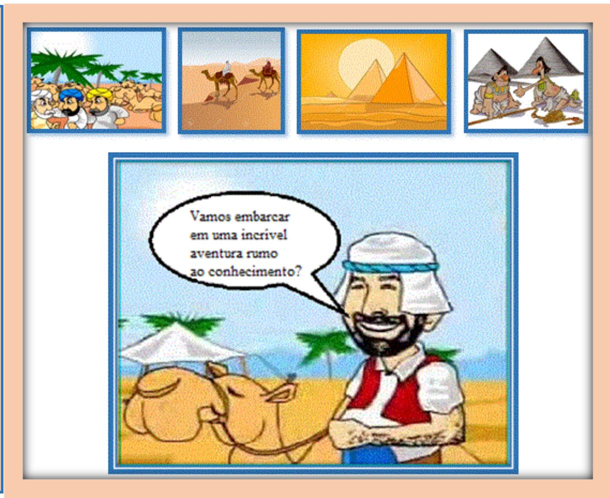
(assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Sugestão de um experimento de ensino para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração

Produto Educacional de Mestrado apresentado ao programa de Pós Graduação em educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás- Campus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática.

O PROBLEMA DOS CAMELOS:

Um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração



Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Linha de Pesquisa: Fundamentos, metodologias e recursos para a Educação para Ciências e Matemática

Sublinha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Duelci Aparecido de Freitas Vaz

JATAÍ

2021

SUMÁRIO

Apresentação

Prezados professores/as, este produto educacional é fruto de uma pesquisa sobre o conceito de adição de fração, na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov. Dessa forma, as tarefas de aprendizagem aqui sugeridas, **objetivam** a formação do pensamento teórico acerca do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, tal como afirma Davydov (1988).

Sendo assim, este produto educacional, que se classifica como uma **sequência didática,** os alunos devem:

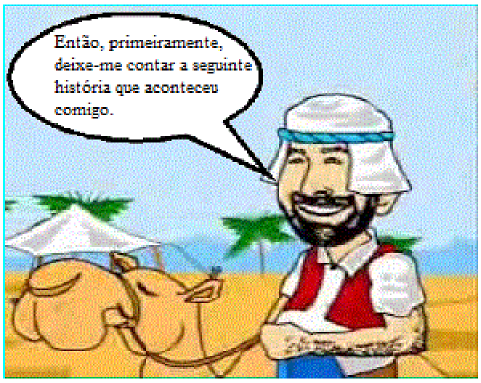
- **Nas aulas 1, 2, 3 e 4:** Identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, que é a equivalência de fração, e identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores iguais, que é o conceito de inteiro;
- **Nas aulas 5 e 6:** A partir da história do conceito de fração, estabelecer um modelo gráfico, literal, que expressa as relações gerais identificadas nas aulas anteriores;
- **Na aula 7:** Introduzir mudanças na relação geral, descaracterizando o objeto, o que reforçará a sua base genética quando os alunos perceberem essa alteração;
- **Nas aulas 8 e 9:** Resolver situações particulares utilizando o procedimento geral estabelecido anteriormente, o que, segundo Freitas e Limonta (2012), implica que o aluno estará pensando teoricamente.
- **Na aula 10:** Realizar uma avaliação de si próprios.

Diante disso, as 10 aulas foram planejadas para serem realizadas com **turmas de 6º ano do ensino fundamental**, sendo cada aula de **50 (cinquenta) minutos.**

Portanto, a seguir, serão apresentadas as tarefas de aprendizagem, bem como, no final, as orientações para o professor ou professora sobre cada atividade.

Ótima Leitura!!!

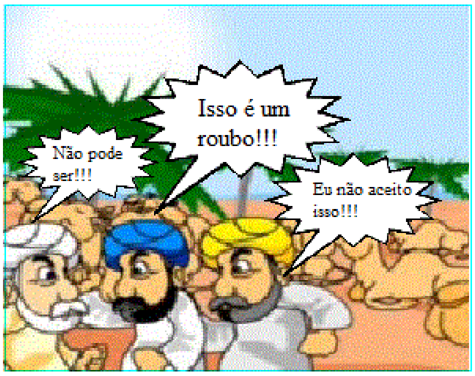
AÇÃO 1 – Aula 1

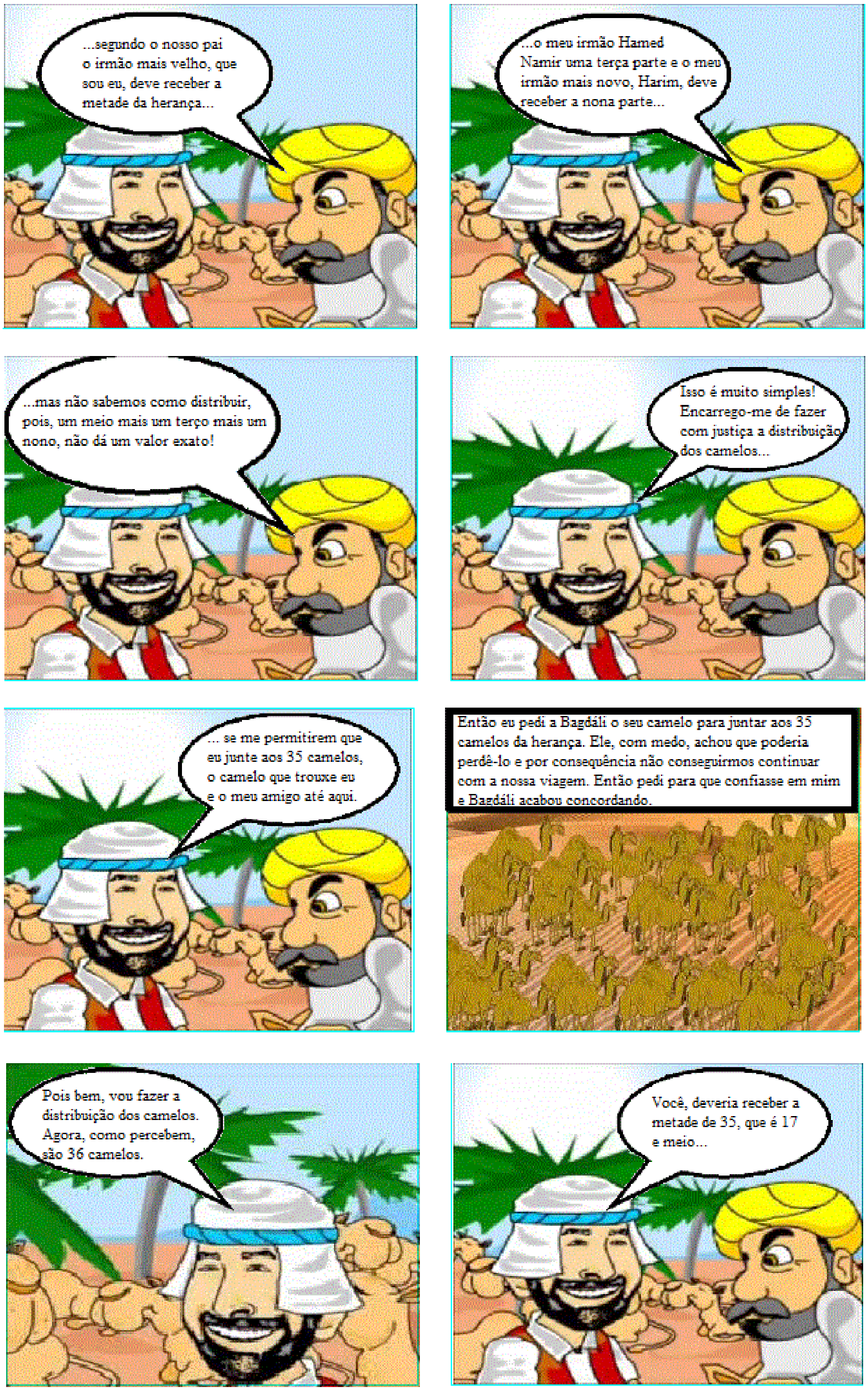


Fonte: elaborado pela autora.

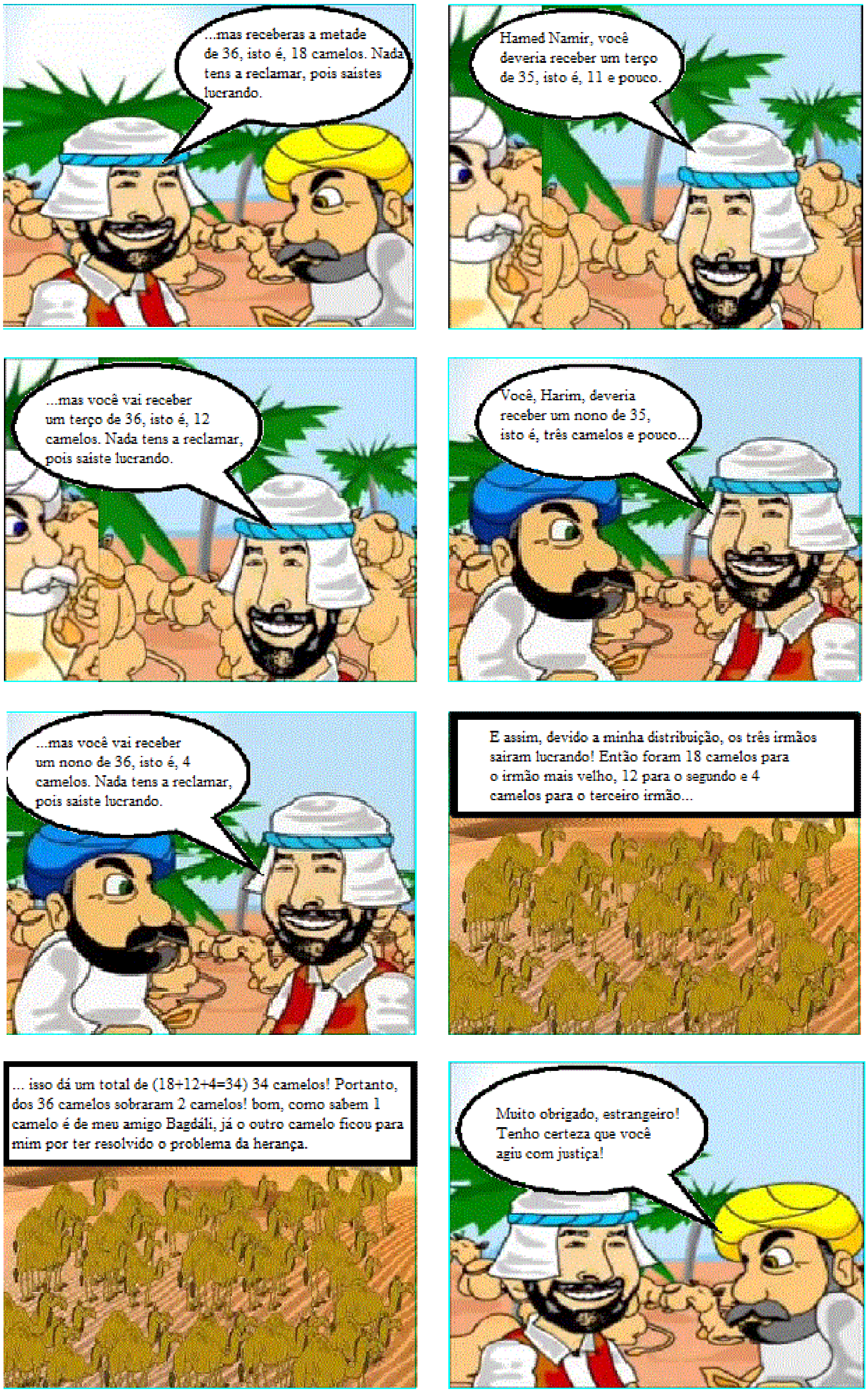
Beremiz Samir é um incrível calculista e está convidando-o para embarcar em uma incrível aventura cheia de história, diversão e, é claro, com muita aprendizagem! Então, concentre-se nessa incrível história que aconteceu com ele e tente compreender a brilhante mente desse calculista. Vamos?!

O PROBLEMA DOS CAMELOS





...segundo o nosso pai o irmão mais velho, que sou eu, deve receber a metade da herança...
...o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e o meu irmão mais novo, Harim, deve receber a nona parte...
...mas não sabemos como distribuir, pois, um meio mais um terço mais um nono, não dá um valor exato!
Isso é muito simples! Encarrego-me de fazer com justiça a distribuição dos camelos...
... se me permitirem que eu junte aos 35 camelos, o camelo que trouxe eu e o meu amigo até aqui.
Então eu pedi a Bagdáli o seu camelo para juntar aos 35 camelos da herança. Ele, com medo, achou que poderia perdê-lo e por consequência não conseguirmos continuar com a nossa viagem. Então pedi para que confiasse em mim e Bagdáli acabou concordando.
Pois bem, vou fazer a distribuição dos camelos. Agora, como percebem, são 36 camelos.
Você, deveria receber a metade de 35, que é 17 e meio...


...mas receberas a metade de 36, isto é, 18 camelos. Nada tens a reclamar, pois saístes lucrando.
Hamed Namir, você deveria receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco.
...mas você vai receber um terço de 36, isto é, 12 camelos. Nada tens a reclamar, pois saiste lucrando.
Você, Harim, deveria receber um nono de 35, isto é, três camelos e pouco...
...mas você vai receber um nono de 36, isto é, 4 camelos. Nada tens a reclamar, pois saiste lucrando.
E assim, devido a minha distribuição, os três irmãos sairam lucrando! Então foram 18 camelos para o irmão mais velho, 12 para o segundo e 4 camelos para o terceiro irmão...
... isso dá um total de (18+12+4=34) 34 camelos! Portanto, dos 36 camelos sobraram 2 camelos! bom, como sabem 1 camelo é de meu amigo Bagdáli, já o outro camelo ficou para mim por ter resolvido o problema da herança.
Muito obrigado, estrangeiro! Tenho certeza que você agiu com justiça!

Fonte: elaborado pela autora.

Essa foi umas das incríveis histórias vividas por Beremiz e seu amigo Bagdáli. Sempre em suas viagens eles encontram muitos desafios... e, olha só! Beremiz tem um recado para você:

Fonte: elaborado pela autora.

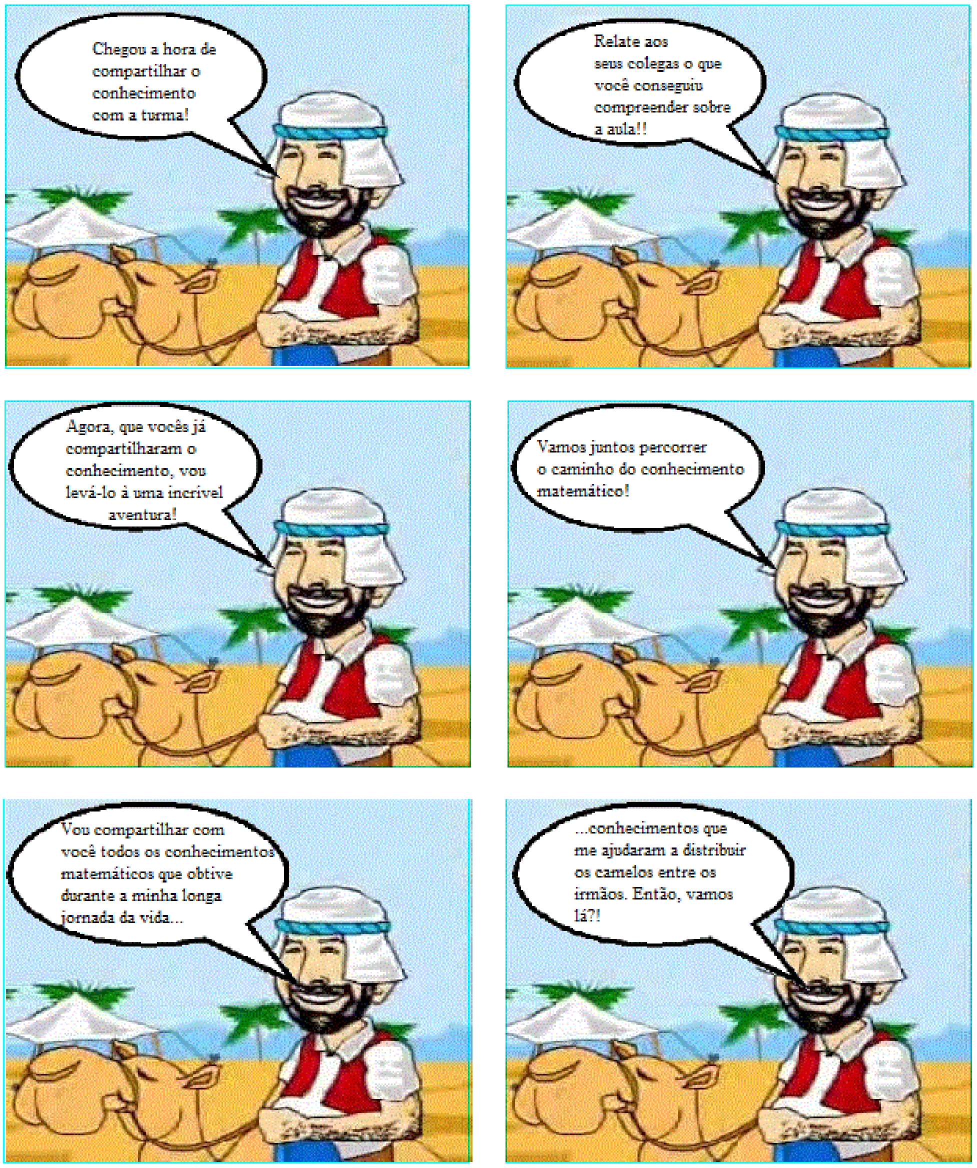
Beremiz Samir é um incrível calculista não é mesmo? Em meio a um grande problema conseguiu perceber uma solução e ainda saiu lucrando com tudo isso!

Bom, é claro que Beremiz não iria oferecer o camelo de seu amigo se ele soubesse que não sairia lucrando. Por exemplo, se fossem 35 bicicletas ou 35 bonecas, você daria a sua bicicleta ou a sua boneca se você soubesse que poderia perdê-la? Só se você saísse no final da história com duas bicicletas ou duas bonecas assim como Beremiz saiu com dois camelos, não é mesmo?

Mas, agora é com você! Tente compreender a brilhante mente desse Calculista! Para isso analise as seguinte questões e responda-as no espaço em branco a seguir:

- **Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?**

- **Como somar as frações da herança?**



Fonte: elaborado pela autora.

ORIENTAÇÕES:

Em resumo, o “Problema dos Camelos” conta a história de Beremiz Samir e de seu amigo Bagdáli, que viajavam juntos para Bagdá. No meio do caminho os dois amigos encontraram três irmãos que estavam discutindo entre si em relação a partilha da herança que o pai havia deixado para eles. A herança são 35 (trinta e cinco) camelos que deveriam ser divididos entre os irmãos da seguinte maneira: o irmão mais velho deveria receber a metade da herança; o irmão do meio deveria receber a terça parte da herança e, por fim, o irmão mais novo deveria receber a nona parte da herança. Entretanto, essa partilha não daria um número exato de camelos aos três irmãos.

Assim, Beremiz Samir se ofereceu para ajudar os três irmãos, juntando o camelo de seu amigo Bagdáli aos camelos da herança. Dessa forma, agora, com um total de 36 (trinta e seis) camelos, os três irmãos saíram lucrando, sendo que o irmão mais velho recebeu 18 (dezoito) camelos, o irmão do meio recebeu 12 (doze) camelos e, por fim, o irmão mais novo recebeu 4 (quatro) camelos. Além disso, Beremiz Samir, também saiu lucrando, conseguindo de volta o camelo de seu amigo Bagdáli e um camelo para si.

Diante dessa história, pergunta-se:

- **Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?**

O conhecimento matemático que Beremiz Samir utilizou foi a adição de fração com denominadores diferentes. Isso pode ser constatado, especificamente, no sétimo quadrinho da história (Apêndice A), onde o irmão mais velho diz: “[...] um meio mais um terço mais um nono não dá um valor exato”. Sendo assim, Beremiz Samir percebeu que, ao somar as frações da herança, o resultado não equivale a um inteiro, ou seja, haveria uma “sobra”. Por isso forneceu o camelo de seu amigo, recebendo-o de volta, e ganhou um camelo para si.

- **Como somar as frações da herança?**

Como o conhecimento matemático adição de fração com denominadores diferentes foi reconhecido na questão anterior, a forma como as frações da herança foi somada, diz respeito a relação geral principal que os alunos devem identificar, que é por meio do estabelecimento de frações equivalentes. Dessa forma, os estudantes precisam compreender que não se deve somar os denominadores das frações, mas igualá-los a um mesmo denominador para, assim, posteriormente, realizar a operação de adição. É evidente que o objetivo do “Problema dos Camelos” não é explicar como se realiza a adição de fração com denominadores diferentes, entretanto, vimos nesse problema uma possibilidade motivadora para a formação do conceito dessa operação, além de solucionar o próprio problema.

Diante disso, o objetivo da primeira ação de aprendizagem descrita por Davydov (1988), consiste na transformação dos dados da tarefa objetivando a identificação da relação geral do objeto de estudo. Sendo assim, a relação geral que os alunos devem identificar por meio do problema é que, para realizar a adição de fração com denominadores diferentes, devem ser estabelecidas frações equivalentes, sendo esta a relação geral que expressa o núcleo do objeto.

Para identificar a relação geral do objeto, devem ser propostas tarefas de aprendizagem. A primeira tarefa consiste na leitura da história em quadrinho, identificando o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, por meio da análise da história e diálogo entre os grupos e o professor.

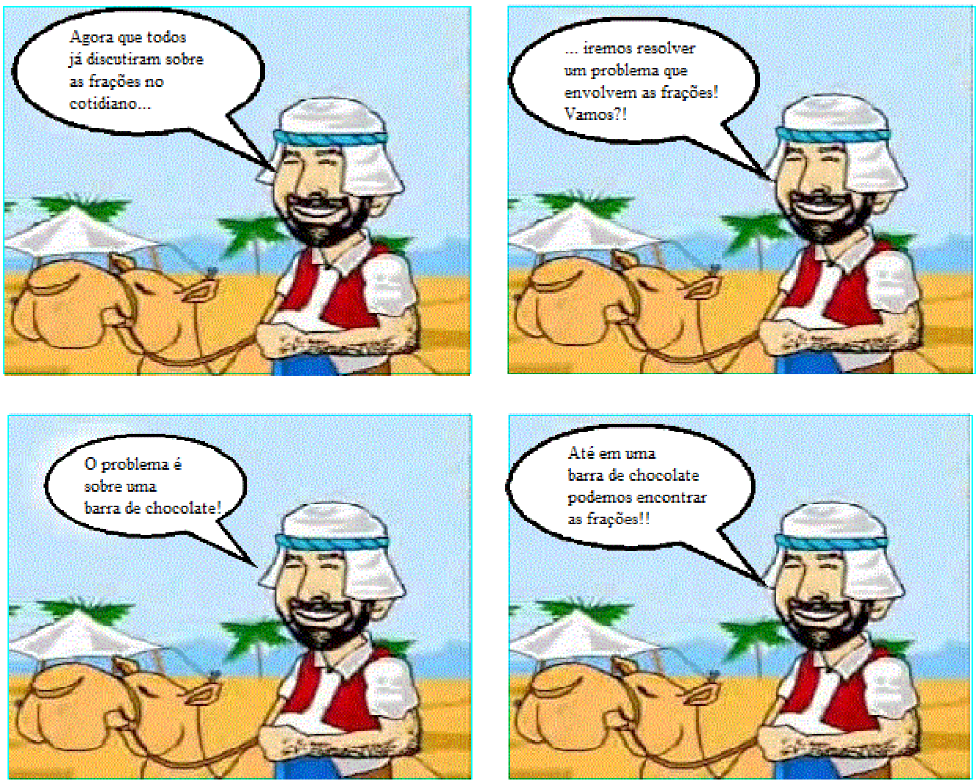
Após a identificação do objeto, outra tarefa de aprendizagem deve ser proposta. Nessa tarefa, os alunos devem analisar como somar as frações da herança obtendo o número não exato, e registrar essas informações em uma folha para, depois, serem discutidas entre a turma e o professor. Assim, este momento tem como objetivo verificar o que os alunos compreendem sobre adição de fração com denominadores diferentes.

AÇÃO 1 – AULA 2

Fonte: elaborado pela autora.

Beremiz Samir, está te convidando para conhecer as frações! Então, reflita um pouco sobre as situações do cotidiano que podemos encontrá-las! Olhe ao seu redor, imagine a sua casa, a sua rua, os supermercados e tente identificar onde podemos encontrar as frações!

Além disso, discuta com os seus colegas de grupo, troque experiências com eles perguntando-os o que eles sabem sobre as frações!!!!



Fonte: elaborado pela autora

- **Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?**

Beremiz Samir quer te ajudar a analisar esse problema, vamos? Para isso, considere a barra de chocolate que está em cima de sua mesa e:

Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora.

- **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?**

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em "deixar de lado", momentaneamente, o "Problema dos Camelos", indo em busca de conhecimento para, posteriormente, voltar ao problema e identificar a relação geral do objeto.

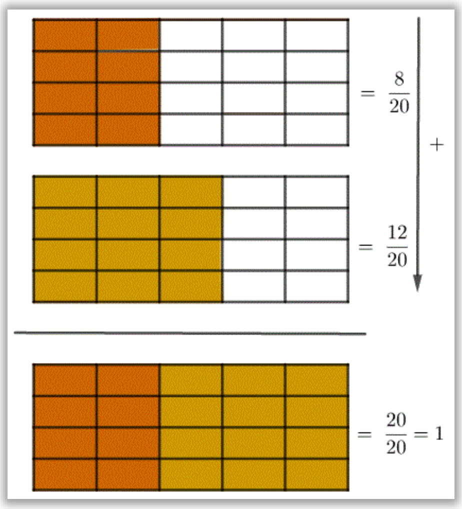
Assim, nesta aula, dever ser perguntado aos alunos se eles conseguem relacionar as frações com alguma situação do cotidiano. Após essa conversa o professor lançará a seguinte questão:

- **Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?**

Para isso, uma barra de chocolate contendo vinte retângulos que a forma, deverá ser dada aos alunos. Assim, os estudantes poderão retirar, primeiramente, oito vinte avos da barra de chocolate e, em seguida, mais doze vinte avos. Com isso será possível perceber que todos os retângulos foram retirados, logo a resposta é que a barra de chocolate foi comida por inteiro.

Uma representação numérica e geométrica dessa situação pode ser vista na figura 1:

Figura 1 – Representação numérica e geométrica para o problema da barra de chocolate



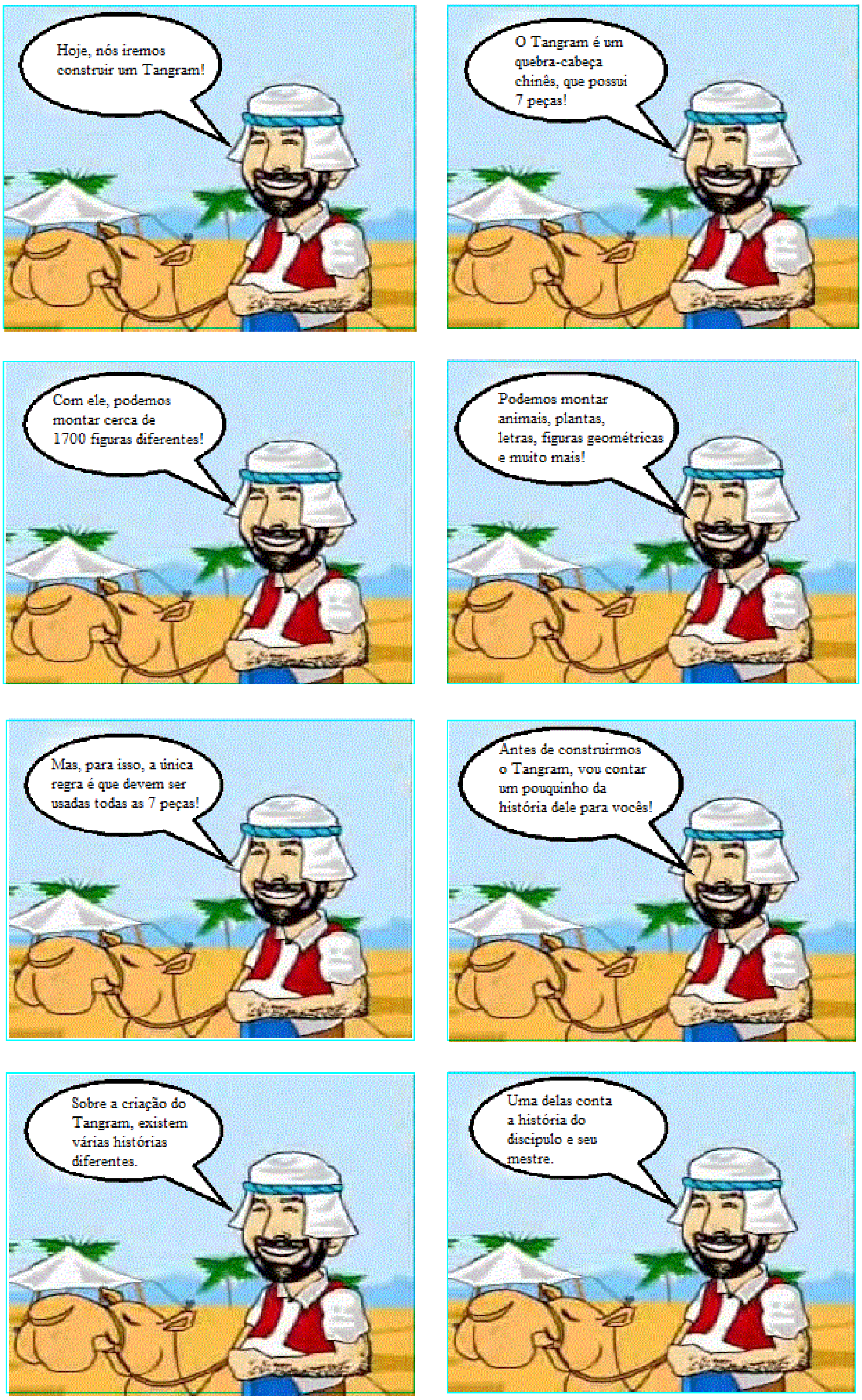
Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

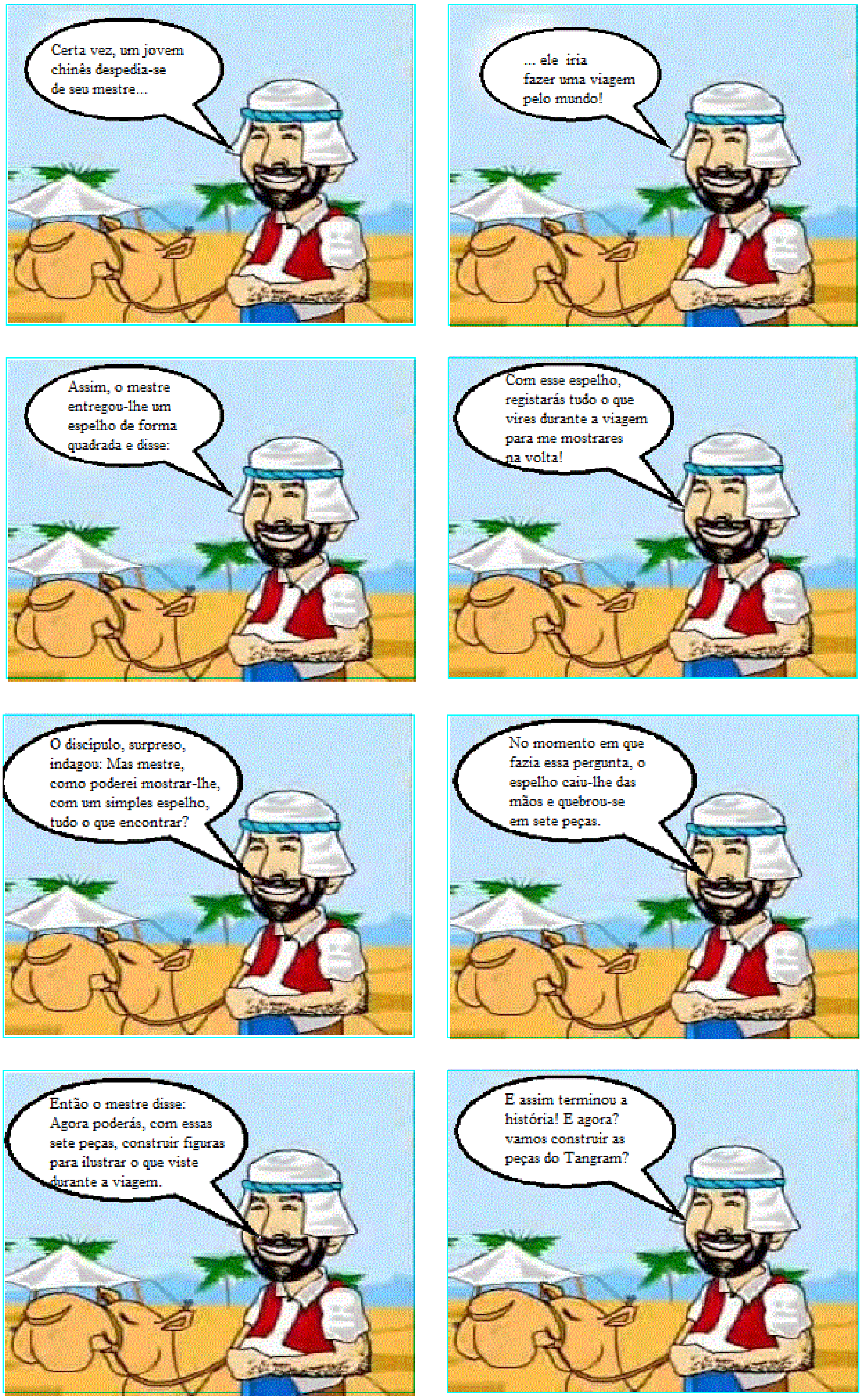
Terminada as análises, os grupos deverão apresentar os seus resultados para a turma. Assim, por meio de uma discussão, os alunos devem compreender como é a representação numérica e geométrica de uma adição de fração, o que é um inteiro e, por fim, o que significa o conceito de adição de fração com denominador igual, desencadeado pela pergunta:

- **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?**

Portanto, o objetivo é que os alunos possam compreender, por meio da manipulação do material (barra de chocolate) e da troca e experiências uns com os outros, como se dá a representação geométrica e numérica de fração, o significado do conceito da adição de fração com denominadores iguais e, também, a noção do inteiro.

AÇÃO 1 – Aula 3

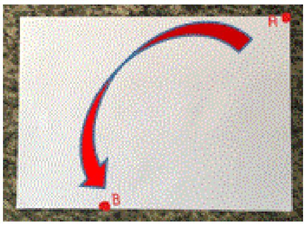

Hoje, nós iremos construir um Tangram!
O Tangram é um quebra-cabeça chinês, que possui 7 peças!
Com ele, podemos montar cerca de 1700 figuras diferentes!
Podemos montar animais, plantas, letras, figuras geométricas e muito mais!
Mas, para isso, a única regra é que devem ser usadas todas as 7 peças!
Antes de construirmos o Tangram, vou contar um pouquinho da história dele para vocês!
Sobre a criação do Tangram, existem várias histórias diferentes.
Uma delas conta a história do discípulo e seu mestre.

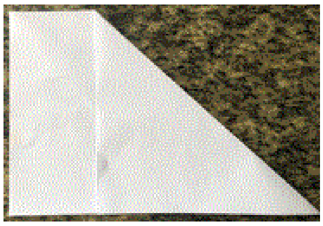


Fonte: elaborado pela autora.

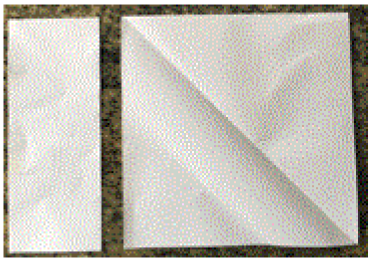
Agora, uma folha de papel A4 será entregue a você! Dessa forma, siga as recomendações a seguir e, com o auxílio de uma tesoura, construa as peças do Tangram!

Coloque o papel A4 na horizontal. Em seguida, dobre do ponto A até o ponto B. Será formado um triângulo.



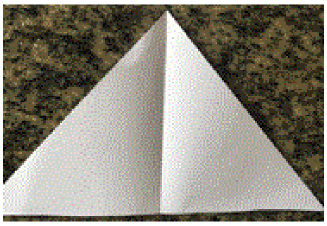


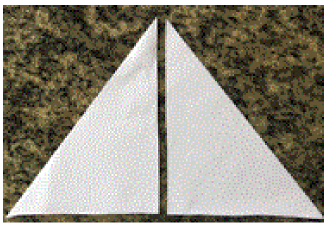
Agora, recorte o retângulo que sobrou e o descarte.



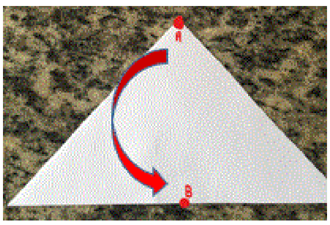
Agora, recorte o quadrado ao meio

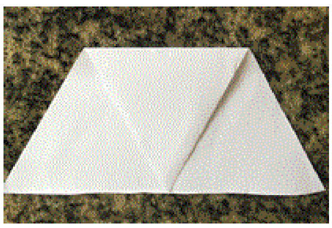
Dobre ao meio uma das metades e recorte-a



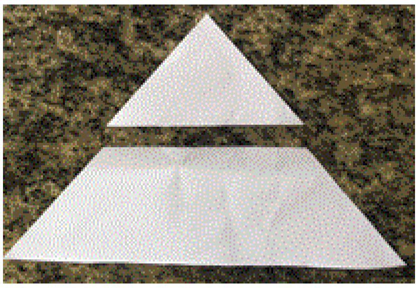


Com a outra metade que sobrou, dobre do ponto A até o ponto B

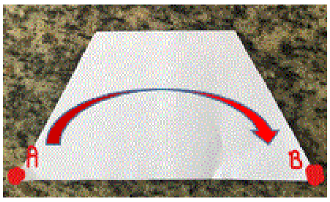


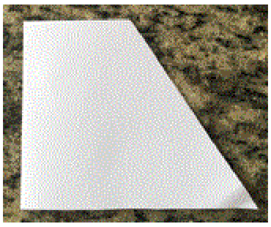


Em seguida, recorte conforme a figura

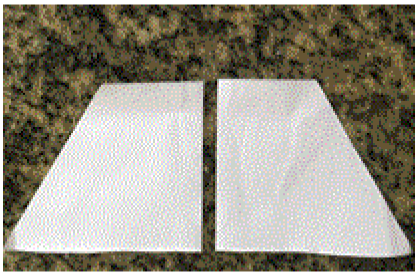


Com a parte de baixo, dobre do ponto A até o ponto B

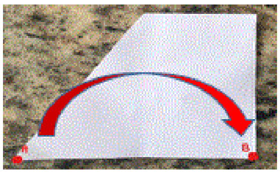




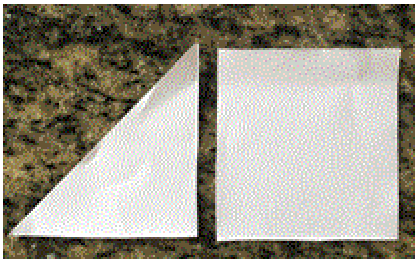
Em seguida, recorte conforme a figura



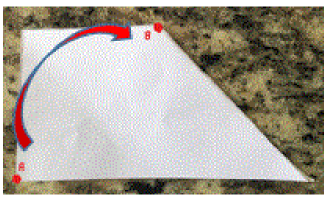
Com uma das metades, dobre do ponto A até o ponto B.

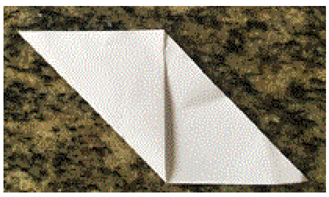


Em seguida, recorte conforme a figura

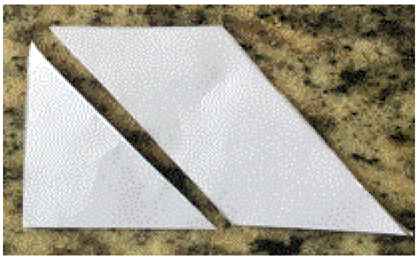


Com a outra metade, dobre do ponto A até o ponto B

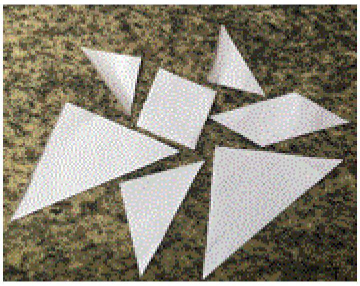




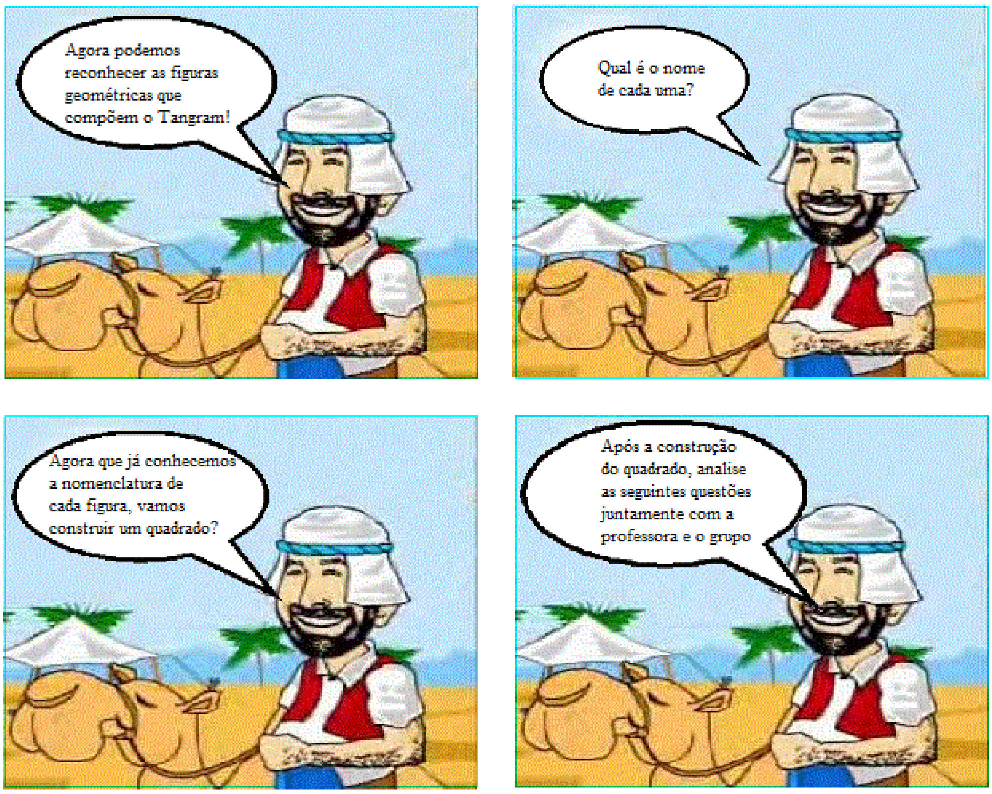
Em seguida, recorte conforme a figura



Estão prontas todas as sete peças do Tangram!



Fonte: elaborado pela autora.



Fonte: Elaborado pela autora.

- Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?

- Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram? O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?

- Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos? Escreva uma adição que representa essa situação, e a represente geometricamente.

- O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?

Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora.

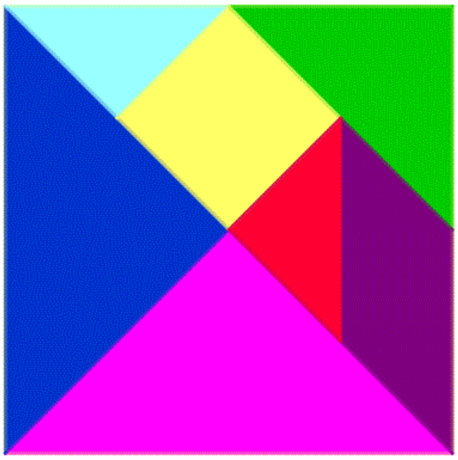
ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em construir um Tangram para que os alunos possam aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações de aprendizagem que o envolva, e generalizar esse conhecimento para a operação de subtração. Além disso, com o Tangram, visa introduzir o conceito de frações equivalentes.

O Tangram, é um quebra-cabeça chinês, que possui sete peças. São cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. Estas peças são originadas da decomposição de um quadrado.

A figura 2, ilustra o Tangram:

Figura 2 – Tangram



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Segundo Santos (2019), o Tangram pode ser utilizado nas aulas de matemática para atingir diversos objetivos, como, por exemplo introduzir o conceito de operações com frações. Além disso,

> [...] o Tangram como auxílio didático em sala de aula, propícia um aumento de interesse, motivação e aprendizado por parte dos alunos, tornando as aulas mais dinâmica e produtiva, contando com maior participação dos educandos na explicação e discussão do conteúdo, facilitando a compreensão da ideia de fração e de sua simbologia, além de favorecer a interação entre eles, tornando-os sujeitos ativos no processo de aprendizagem (SANTOS, 2019, p. 83).

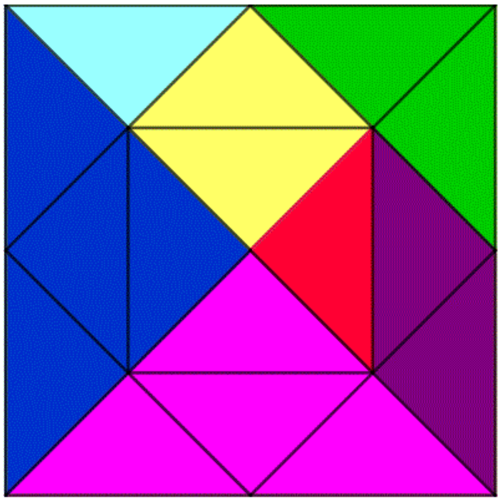
Para iniciar a aula, os alunos devem a história em quadrinho sobre o Tangram. Após, uma folha de papel A4 deve ser entregue a cada aluno para construí-lo.

Após a construção, os alunos deverão reconhecer as figuras geométricas, que compõe o Tangram, e com elas formar um quadrado. Posteriormente devem analisar as seguintes questões norteadoras:

- **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?**

Para respondermos a essa questão analisemos a figura 3, que mostra o Tangram, que pode ser subdivido em 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno.

Figura 3 – Tangram subdividido em 16 triângulos semelhantes ao triângulo pequeno



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Primeiramente, os alunos precisam analisar o quadrado e concluir que este é formado por 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno. Em seguida, é fácil verificar que a fração que representa o paralelogramo é $\frac{2}{16}$, pois cada triângulo que se formou equivale a $\frac{1}{16}$ do quadrado. Logo, a fração que representa o paralelogramo é igual a $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$.

O mesmo processo equivale para determinar a fração do inteiro que representa o quadrado, os dois triângulos pequenos e o triângulo médio.

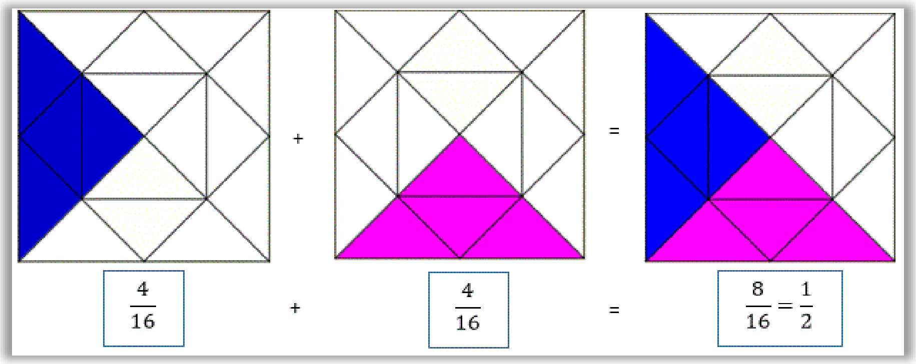
- **Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram? O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?**

O Tangram pode ser representado pela fração $\frac{16}{16}$. Como o quadrado equivale a $\frac{2}{16}$ do Tangram, e o triângulo pequeno equivale a $\frac{1}{16}$, logo temos que os dois juntos equivale a $\frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Diante disso, ao retirarmos do Tangram um dos triângulos pequenos mais o quadrado, temos a seguinte subtração: $\frac{16}{16} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$. Portanto, os alunos devem concluir que, fração com denominadores iguais, o denominador não muda, assim como na adição de fração com denominadores iguais, pois os valores que estão sendo retirados do Tangram partem de um mesmo valor inteiro.

- **Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos? Escreva uma adição que representa essa situação, e a represente geometricamente.**

A figura 4, mostra uma adição que representa essa situação e sua representação geométrica:

Figura 4 – Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos?



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Analisando a figura 4, cada triângulo grande equivale a $\frac{4}{16}$ do Tangram. Logo, temos que $\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{8}{16}$. Portanto, a fração que representa os dois triângulos juntos é igual a $\frac{8}{16}$.

Posteriormente, os alunos deverão apresentar os seus resultados para toda a turma. Em seguida, deve ser perguntado:

- **O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?**

O objetivo é que os estudantes percebam, por meio da representação geométrica e do Tangram, que a fração $\frac{8}{16}$ é a metade do quadrado, logo esta fração é equivalente a fração $\frac{1}{2}$.

AÇÃO 1 – Aula 4

Fonte: elaborado pela autora

Agora que você está com a folha de papel milimetrado em mãos, analise e responda a seguinte questão:

- **Nas aulas anteriores, representamos geometricamente e numericamente a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que represente a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las.**

Fonte: elaborado pela autora.

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em voltar ao problema dos camelos para identificar a relação geral do objeto adição de fração com denominadores diferentes, que é a equivalência de frações.

Especificamente, será pedido aos alunos que escrevam uma adição para as frações do problema, que são elas: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$.

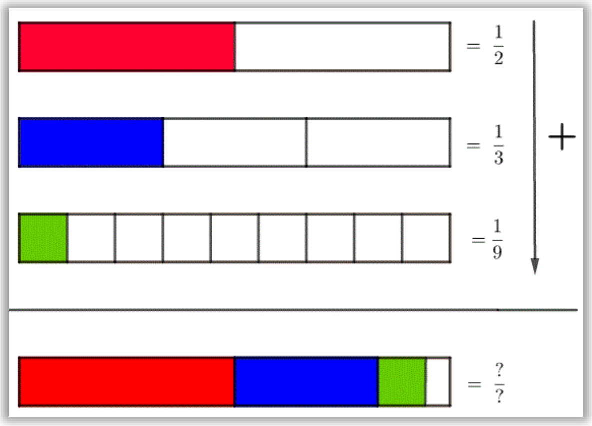
Uma vez que a soma de frações com denominadores iguais já é conhecida tanto numericamente quanto geometricamente, basta que os alunos façam uma analogia das aulas anteriores, tendo em vista realizar o mesmo processo, agora, para as frações com denominadores diferentes.

Portanto, será lançada a seguinte questão:

- **Nas aulas anteriores, representamos geometricamente e numericamente a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las.**

Com isso, por meio de um processo de análise e reflexão entre professor e alunos, estes deverão perceber que, para se realizar a adição de fração com denominadores diferentes, é preciso obter um denominador comum. Geometricamente, temos a seguinte explicação:

Figura 5 – Solução geométrica que represente a adição das frações da herança



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

De acordo com a figura 5, temos que, o primeiro retângulo, está divido em duas partes iguais, onde uma parte foi pintada. A parte pintada representa $\frac{1}{2}$ do total. Em seguida, o segundo retângulo está dividido em três partes iguais, onde, uma parte foi pintada. A parte pintada representa $\frac{1}{3}$ do total. Por fim, o terceiro retângulo, está dividido em nove partes iguais, onde, assim como nos casos anteriores, uma parte foi pinta. A parte pintada representa $\frac{1}{9}$ do total. Diante disso, verifica-se que não é possível "encaixar" com total perfeição as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ no quarto retângulo.

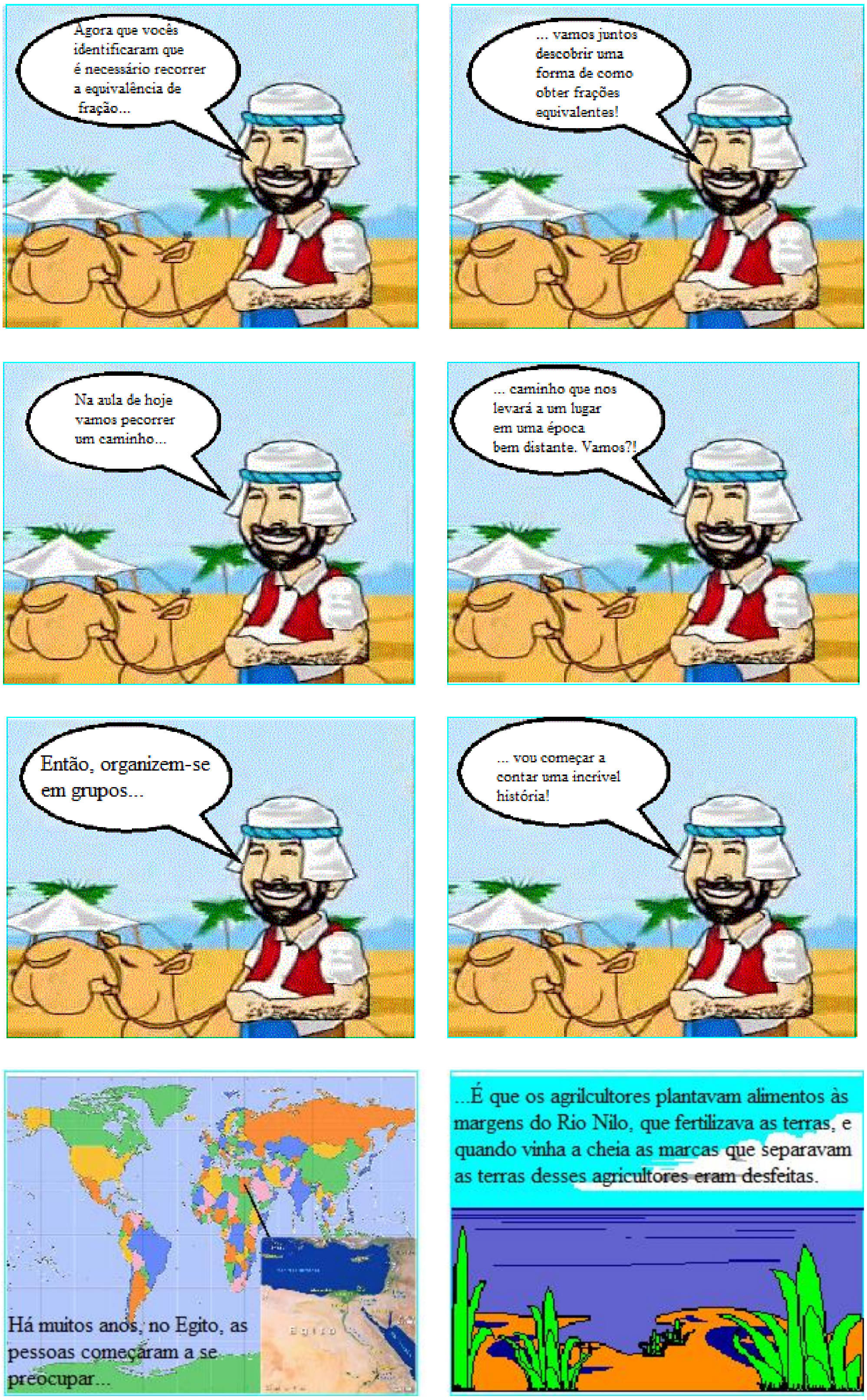
Diferentemente desse caso, nas aulas anteriores sobre adição de fração com denominadores iguais, as frações representavam um mesmo valor inteiro. Agora, como realizar a operação de adição de fração quando o denominador não é o mesmo? Para responder a essa pergunta os alunos devem, juntamente com o professor, por meio de uma análise e reflexão dos conhecimentos apropriados nas aulas anteriores, perceber que é necessário recorrer a equivalência entre frações, que é a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.

Para que os alunos identifiquem a relação geral, será recordada a aula sobre a barra de chocolate, de forma que percebam que as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ não representam o mesmo inteiro, diferentemente de quando as frações possuem o mesmo denominador. Posteriormente, será relembrada a aula sobre o Tangram, perguntado, novamente, o que significa a fração$\frac{8}{16}$ e $\frac{1}{2}$.

Diante disso, por meio de um diálogo e reflexão, deverão perceber que equivalem a metade do quadrado, ou seja, correspondem a uma mesma quantidade. Assim, utilizaremos desse exemplo para as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ e, como os alunos sabem que estas não representam um mesmo valor, logo perceberão que é necessário recorrer a equivalência de frações, de forma que possam "igualá-las" a um mesmo inteiro para, assim, realizar a operação de adição para quando os denominadores forem diferentes.

AÇÃO 2 – Aula 5

Parte 1

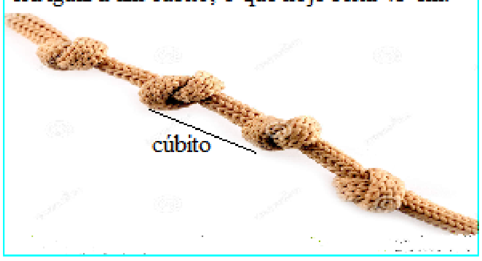


Fonte: continua

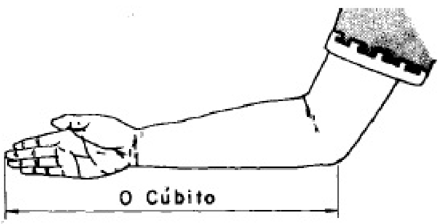
Fonte: elaborado pela autora.

Parte 2

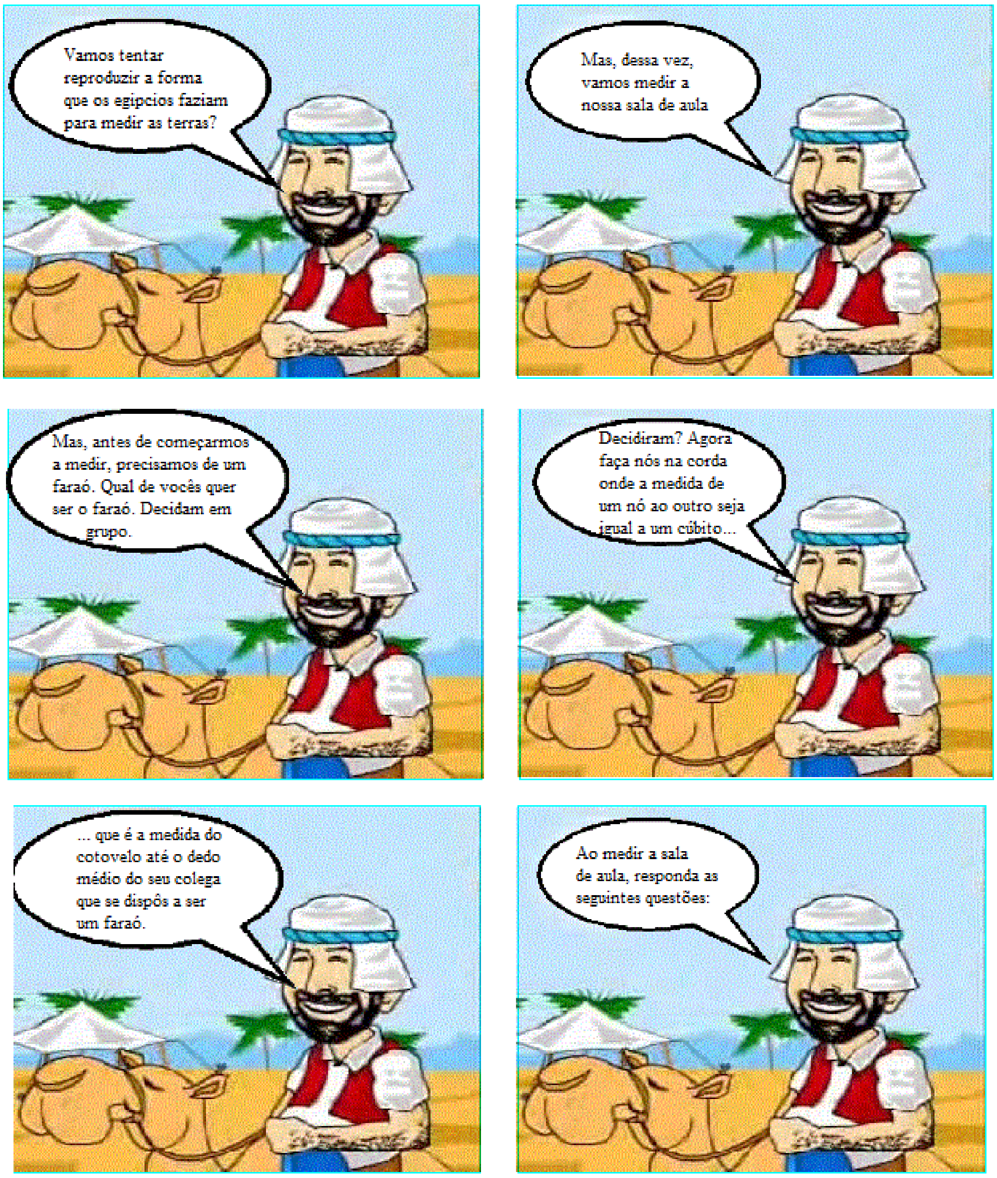
Para medir as terras, foram utilizadas cordas. Nessas cordas eram feitos nós igualmente espaçados, onde a distância de um nó ao outro era igual a um cúbito, o que hoje seria 45 cm.



O cúbito era uma unidade de medida dos egípicos. Assim o comprimento do cúbito equivale a distância do cotovelo até o final do dedo médio do faraó



Fonte: continua.



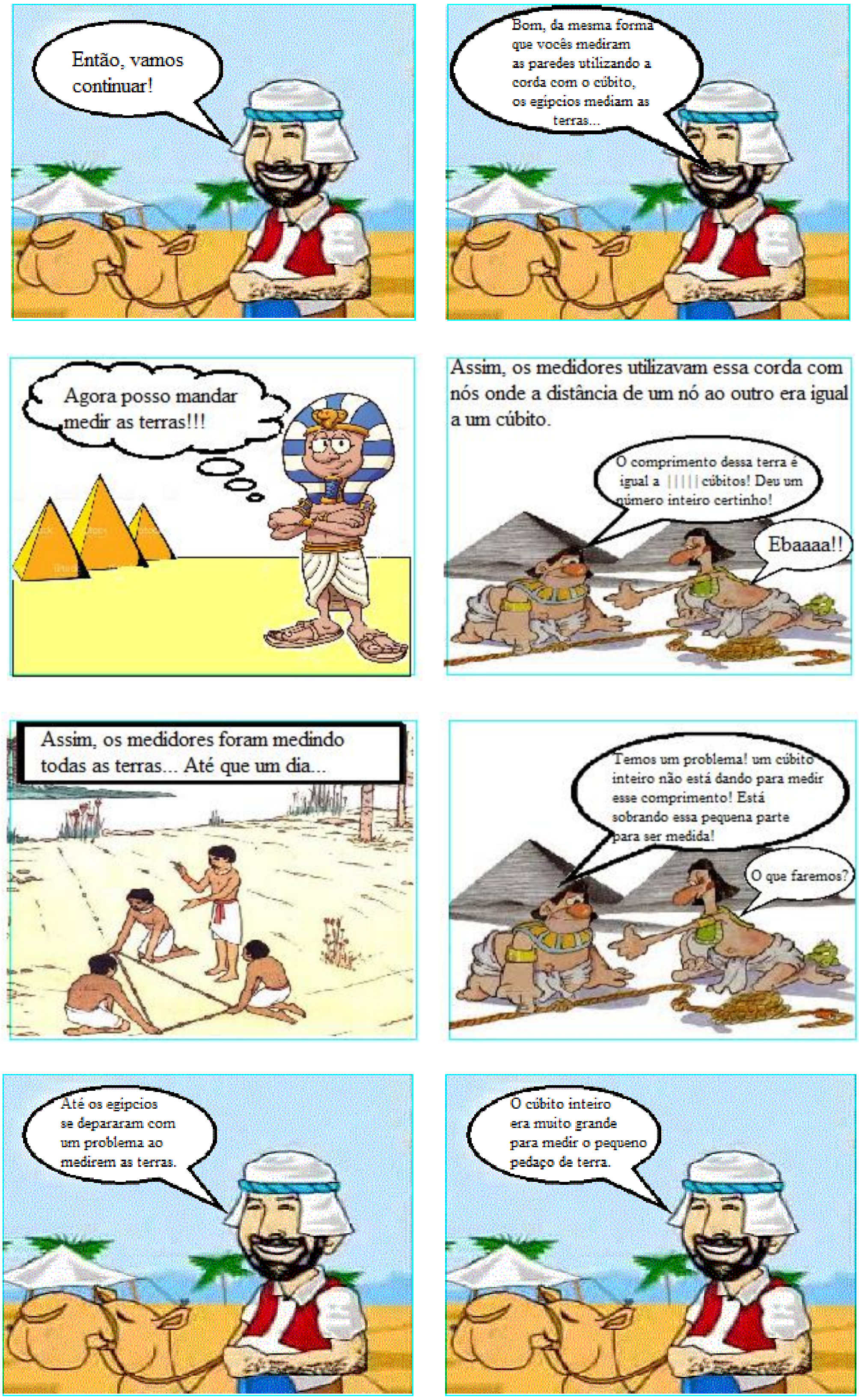
Fonte: elaborado pela autora.

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1. Quantos cúbitos possui a frente da sala de aula?	
2. Quantos cúbitos possui o fundo da sala de aula?	
3. Quantos cúbitos possui os dois lados da sala de aula?	
4. Quantos cúbitos a sala de aula possui no total?	
5. O cúbito inteiro conseguiu medir a frente, fundo e os lados da sala de aula, sem sobrar um pedaço sequer para ser medido? Explique o que aconteceu.	

Fonte: elaborado pela autora

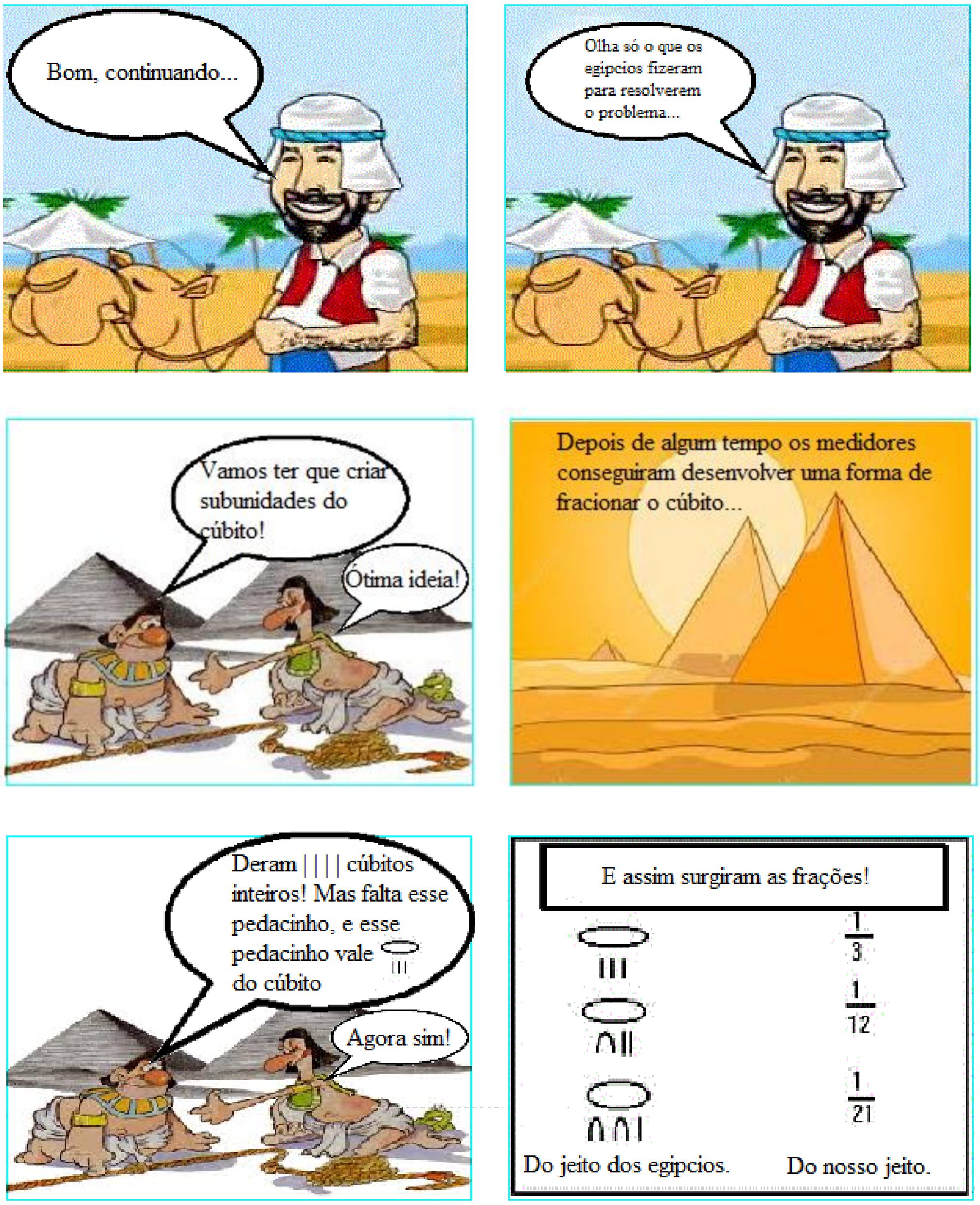
O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?

Parte 3



Fonte: elaborado pela autora.

Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?



Fonte: elaborado pela autora

E foi assim que surgiram as frações! Os egípcios faziam subunidades do cúbito para conseguir medir as terras! Essas subunidade do cúbito podemos chamar de uma parte do cúbito ou uma fração do cúbito. Portando, o surgimento das frações se deve a uma necessidade de medir, ou seja, a unidade de medida padrão da época, que era cúbito, não foi suficiente para fazer as medições, sendo necessário subdividi-lo.

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em ler a história em quadrinho sobre a história do conceito de fração. Dessa forma, tarefas de aprendizagem devem ser propostas para que os alunos reconstruam o acontecimento histórico, que revela o surgimento das frações, à medida que forem lendo a história em quadrinho.

Nesse sentido, a história em quadrinho foi dividida em 3 (quatro) partes, que serão esplanadas a seguir:

Parte 1

Na primeira parte da história em quadrinho, a pesquisadora convidará os alunos a embarcarem em uma grande aventura, juntamente com Beremiz Samir, a fim de descobrir como as frações surgiram para, depois, encontrar uma forma de obter frações equivalentes.

Assim, a história inicia no antigo Egito, com um sério problema: Os agricultores plantavam alimentos às margens do Rio Nilo, que fertilizavam as terras, e quando vinha a cheia as marcas que separavam as terras dos agricultores eram desfeitas. Sendo assim, o faraó precisou mandar medir novamente as terras, mas como ele fará isso?

Portanto, os alunos devem **indicar algum instrumento de medida, que existe atualmente, que pode ser utilizado para medir as terras às margens do rio Nilo**. Sendo assim, podem mencionar instrumentos de medida, tais como: Régua, fita métrica, trena, dentre outros.

O objetivo desta tarefa de aprendizagem é a identificação de instrumentos de medida utilizados atualmente para que, na próxima ação, quando mencionar que os egípcios faziam uso de cordas com nós igualmente espaçados, percebam que os objetos existentes passaram por um processo de transformação, ou evolução no decorrer da história e que isso continua acontecendo.

A figura 6 a seguir, mostra onde os alunos devem escrever, na atividade impressa, os instrumentos de medida que existem hoje. Após, as respostas deverão ser discutidas entre os grupos.

Figura 6 – Indicação de instrumentos de medida

Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora

Parte 2

A segunda parte da história em quadrinho, diz que o instrumento de medida utilizado pelos egípcios eram cordas com nós igualmente espaçados, onde a distância de um nó ao outro era igual a 1 (um) cúbito. Assim, a história continua dizendo que o cúbito era a unidade de medida da época e, que este, era a distância do cotovelo até o dedo médio do faraó.

Dessa forma, será pedido a cada grupo que elejam um faraó para tomar a sua medida. Cada grupo, portanto, terá o seu faraó. Assim, será disponibilizado um rolo de barbante para que os integrantes de cada grupo tomem a medida que vai do cotovelo até o dedo médio do faraó escolhido. Os critérios para a indicação ficarão a escolha dos alunos.

Tendo o barbante como instrumento de medida, os alunos deverão medir a sala de aula, ou seja, a frente, o fundo e os outros dois lados da sala, escrevendo os resultados na atividade impressa. Sendo assim, serão orientados para escreverem, por exemplo: “A frente da sala possui 15 (quinze) cúbitos” ou, quando o cúbito não for suficiente para medir poderão escrever: “A frente da sala possui 15 (quinze) cúbitos e mais um pouco”.

Após as medições, escreverão na atividade impressa se o cúbito inteiro conseguiu medir toda a sala de aula. Se não, será preciso explicar o que aconteceu.

A figura 7, mostra onde os alunos devem escrever, na atividade impressa, as suas respostas:

Figura 7 – Local da atividade impressa onde as medidas da sala deverão ser escritas

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1. Quantos cúbitos possui a frente da sala de aula?	
2. Quantos cúbitos possui o fundo da sala de aula?	
3. Quantos cúbitos possui os dois lados da sala de aula?	
4. Quantos cúbitos a sala de aula possui no total?	
5. O cúbito inteiro conseguiu medir a frente, fundo e os lados da sala de aula, sem sobrar um pedaço sequer para ser medido? Explique o que aconteceu.	

Fonte: elaborado pela autora.

Posteriormente, os resultados devem ser discutidos entre a turma. Em seguida, o professor deve lançar a seguinte questão para discussão:

- **O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?**

Portanto, o objetivo desta segunda tarefa de aprendizagem é que os alunos percebam que os instrumentos de medida evoluíram ao decorrer da história, ao perceberem que os egípcios utilizavam cordas para medir. Além disso, os alunos devem compreender que, para medir, é necessário fracionar o cúbito, já que este inteiro não é suficiente, introduzindo, então, o surgimento do conceito de fração.

Parte 3

A terceira parte da história em quadrinho, conta que os agrimensores mediram as terras assim como os alunos mediram a sala de aula, usando a corda como instrumento de medida e tendo o cúbito como unidade de medida. Assim, os agrimensores se depararam com um problema: o cúbito inteiro não era suficiente para fazer as medições.

Portanto, será perguntado aos alunos:

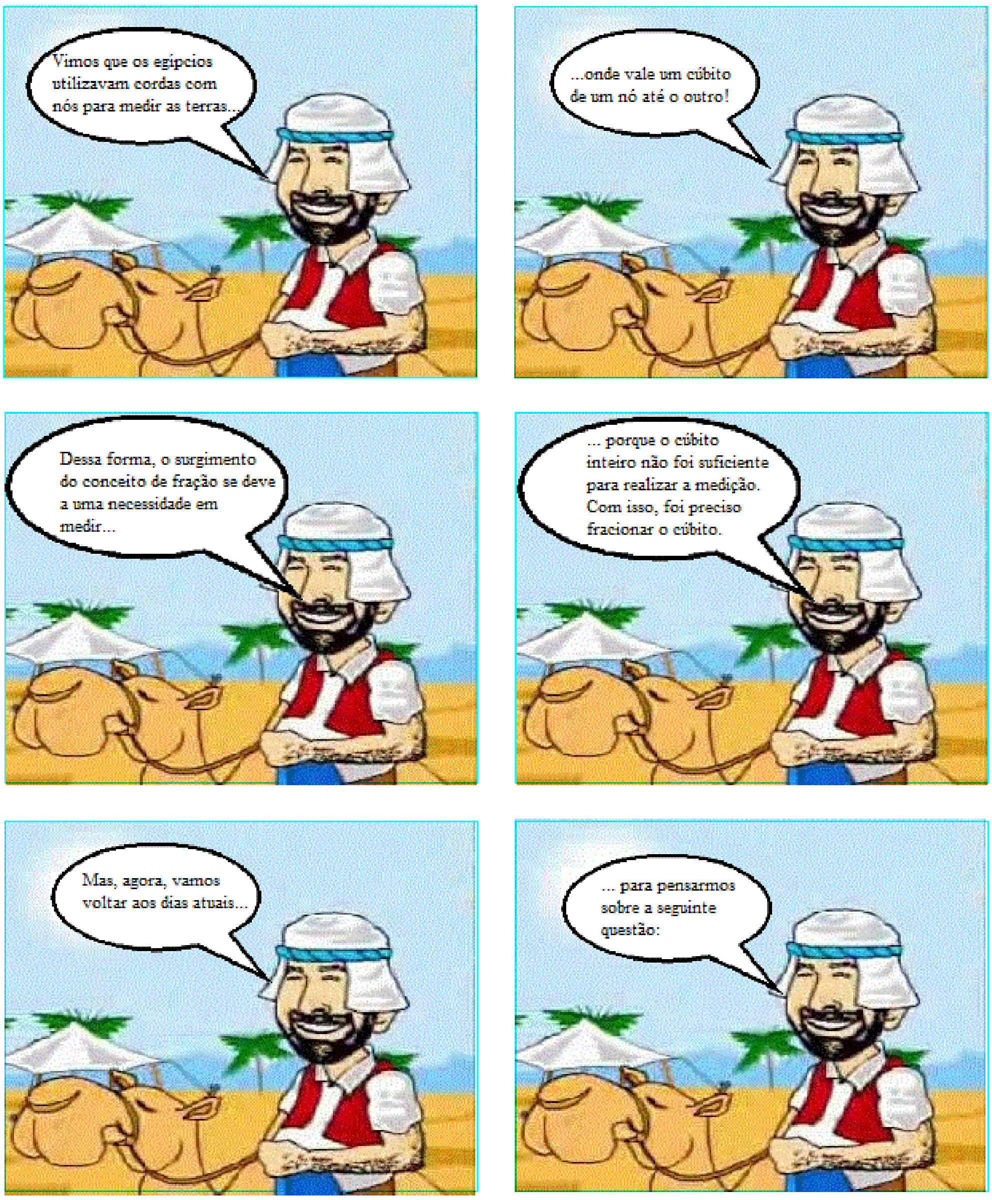
- **Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?**

Com isso, subentende-se que os alunos indicarão que é necessário fracionar o cúbito, pois isso terá sido discutido na tarefa de aprendizagem anterior.

Após essa discussão será dada continuidade a leitura da história em quadrinho, confirmando que na época, foi necessário fracionar o cúbito, sendo este o motivo para o surgimento das frações. A aula terminará levando os alunos a compreenderem que o surgimento das frações se deve a uma necessidade de medir, ou seja, a unidade de medida padrão da época, que era cúbito, não foi suficiente para fazer as medições, sendo necessário subdividi-lo.

Portanto, essa aula tem como objetivo compreender o processo histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir

AÇÃO 2 –Aula 6



Fonte: elaborado pela autora

- **Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida? Discutam, em grupo, sobre isso.**

Fonte: elaborado pela autora

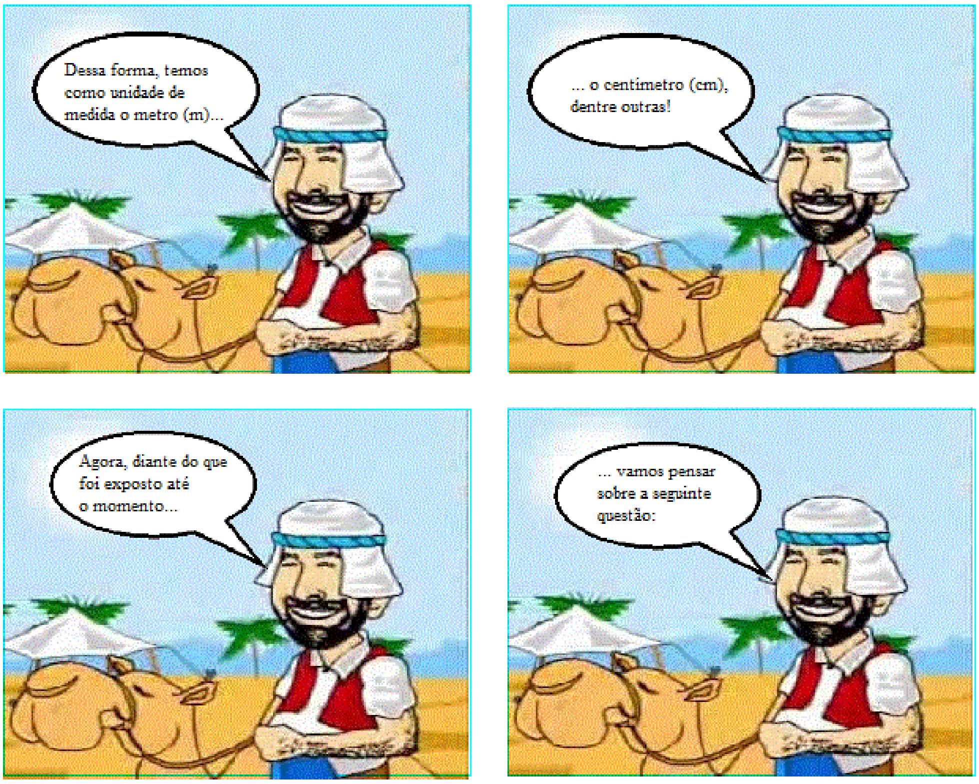
Fonte: elaborado pela autora

Qual é a diferença entre os comprimentos?

Fonte: elaborado pela autora

Assim, compreendemos que o valor cúbito varia, pois nem sempre a medida do cotovelo até o dedo médio de uma pessoa é igual ao de outra. Assim, houve a necessidade de deixar de lado a corda e o cúbito para criar um outro instrumento de medida e uma outra unidade de medida de comum a acordo com todas as pessoas!

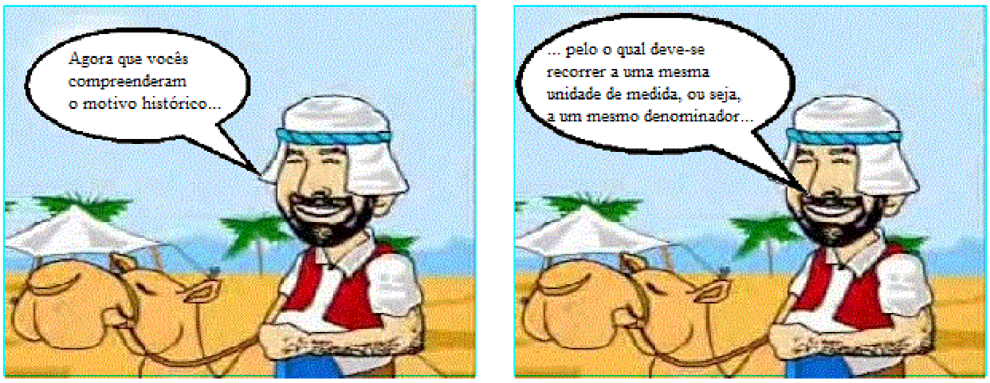
Fonte: continua



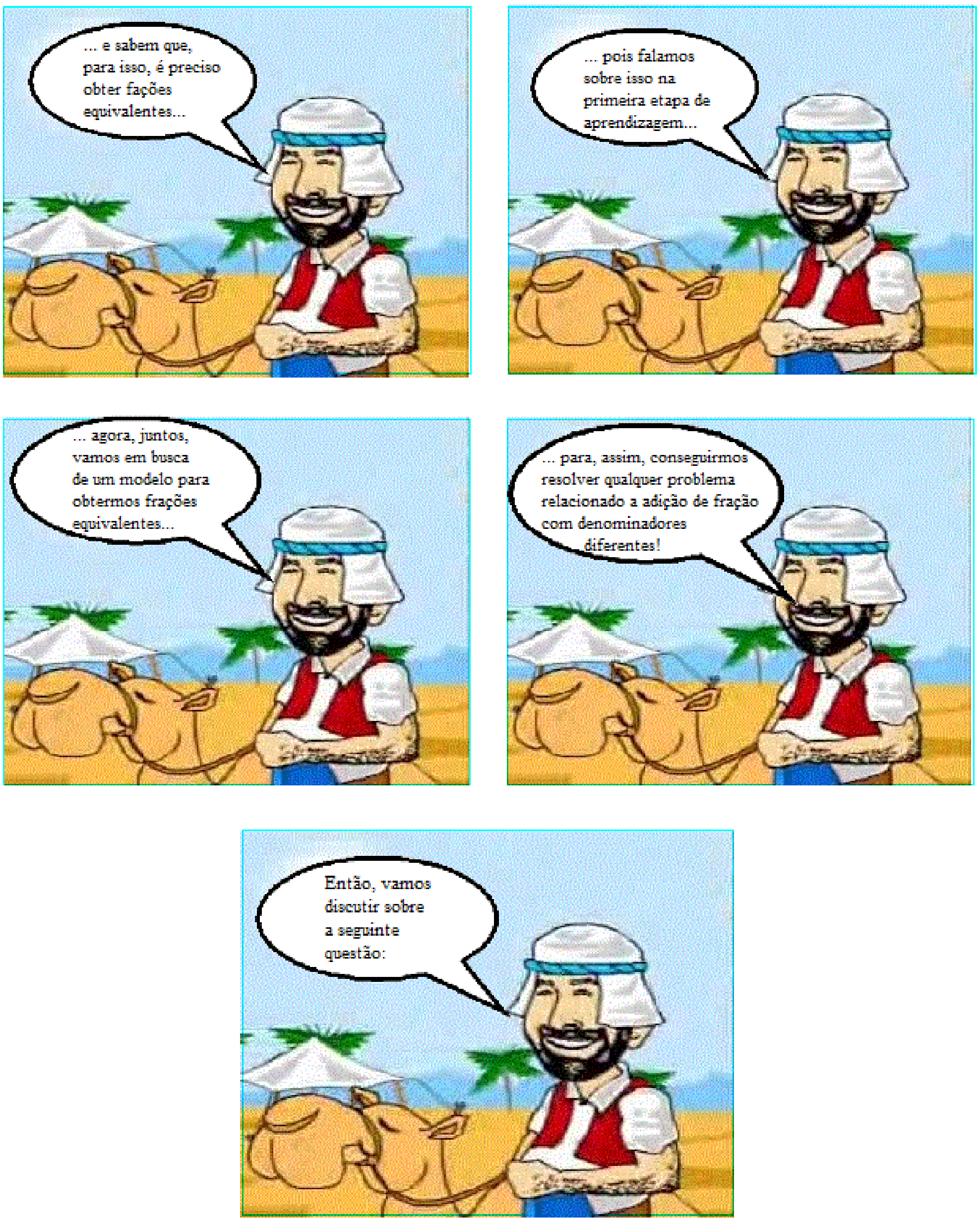
Fonte: elaborado pela autora

- **Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes? Discuta sobre isso.**

- **Vamos pensar nas frações da herança $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$. De acordo com o que foi discutido até o momento, porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?**



Fonte: continua



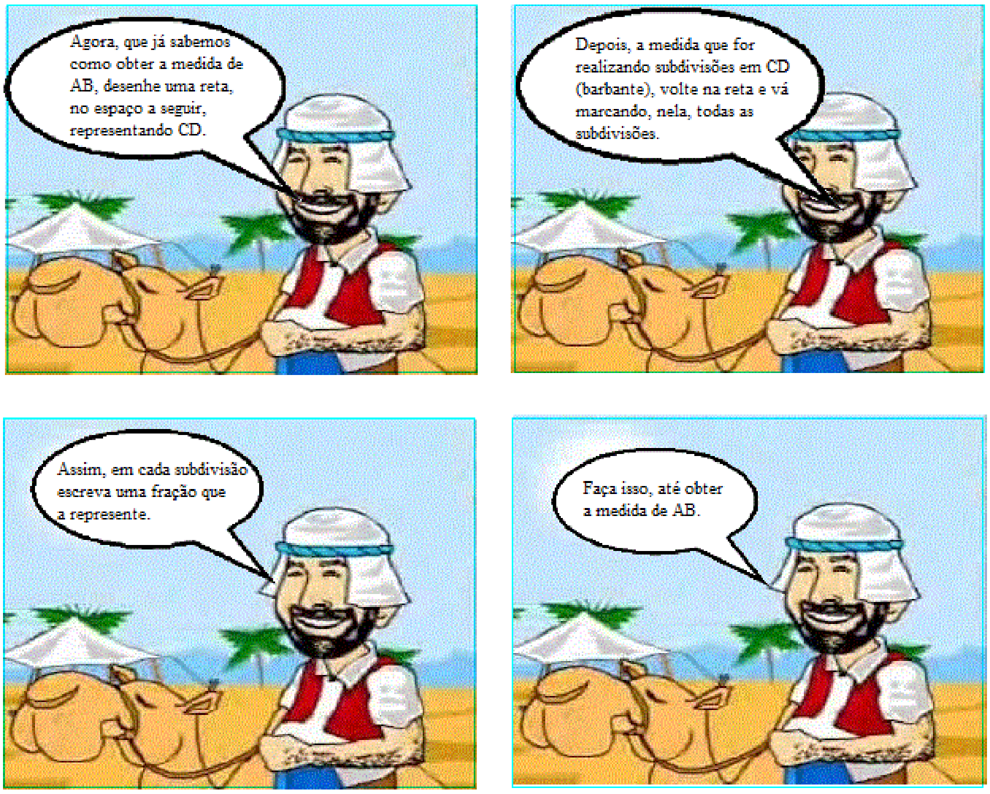
Fonte: elaborado pela autora

- **Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?**

Fonte: continua

Fonte: elaborado pela autora.

- **Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?**



Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Reescreva no quadro abaixo as frações

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

- **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante), tomando o cordão maior como unidade de medida do cordão menor, o que vocês compreendem sobre o conceito de fração?**

- **Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?**

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa tem como objetivo geral introduzir o conceito de fração a partir da comparação entre duas grandezas, sendo a grandeza de comprimento, para em seguida obter um modelo gráfico e literal da relação geral frações equivalentes.

Para isso, como objetivo específico, os alunos devem se apropriar, a partir da história do surgimento do conceito de fração, do motivo pelo qual é necessário submeter-se a um denominador comum quando se quer realizar a operação de adição com denominadores diferentes.

Diante disso, deve ser realizada uma revisão da aula anterior mencionando que as frações surgiram devido a uma necessidade em medir, cuja unidade de medida existente na época, o cúbito, não foi suficiente para fazer a medição, precisando subdividi-lo. Em seguida, será lançada a seguinte questão:

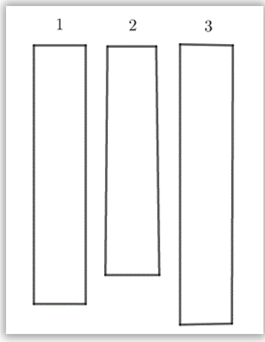
- **Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida?**

Assim, deve haver um momento para que os grupos possam discutir sobre.

Após as discussões, deve ser explicado o motivo de não se utilizar o cúbito. Para isso, os alunos precisam comparar os comprimentos que foram utilizados na aula anterior para medir a sala de aula, colocando-os um ao lado do outro.

A figura 8 traz uma ilustração, como exemplo, mostrando uma possível comparação entre os comprimentos:

Figura 8 – Comparação entre os comprimentos



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Dessa forma, pergunta-se:

- **Qual é a diferença entre os comprimentos utilizados para medir a sala de aula?**

Com isso, os alunos devem perceber que estes não são iguais porque o valor do cúbito varia, ou seja, nem sempre a medida do cotovelo até o dedo médio de uma pessoa é igual ao de outra. Portanto, para que os comprimentos sejam iguais

> [...] se faz necessária a opção, em comum acordo, por uma mesma unidade de medida. Nesse momento, o professor traduz a necessidade histórica de que as pessoas, no mundo inteiro, também fizeram um acordo sobre a adoção de algumas medidas, chamadas simplesmente de medidas ou unidades de medida (ROSA, 2012, p. 185).

Sendo assim, para medir comprimentos, as pessoas adotaram unidades de medida padrão, como o metro (m) e o centímetro (cm) (ROSA, 2012).

Em seguida os alunos devem ser questionados:

- **Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes?**

Portanto, por meio da comparação entre os comprimentos e a necessidade histórica de uma mesma unidade de medida, pretende-se que os alunos, através de um diálogo, percebam, segundo Rosa (2012, p. 185), com relação aos números racionais, “[...] que só se realiza as operações com os números obtidos de medidas com a mesma unidade [...]”. Com isso, compreenderão por que é necessário remeter-se a um denominador comum, ou seja, recorrer a uma mesma unidade de medida (ROSA, 2012).

Em seguida, será recordada as frações da herança $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, perguntando:

- **De acordo com o que foi discutido até o momento, explique porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?**

Dessa forma, os alunos devem compreender, por meio de uma discussão, que se tomarmos, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ significa que, segundo Rosa (2012, p. 185), “[...] em um caso, a unidade foi dividida em três partes e se tomou uma delas e, no outro, em duas partes e também se tomou uma delas”. O mesmo vale para a fração $\frac{1}{9}$. Diante disso, conclui-se que “é evidente que são diferentes ‘medidas’ e, portanto, não se pode somar. Para somá-las há que levá-las a uma mesma unidade medida – denominador comum” (TALIZINA[10], 1987, p. 52, apud ROSA, 2012, p. 185).

Tendo se apropriado do motivo histórico pelo o qual deve-se recorrer a uma mesma unidade de medida, ou seja, a um mesmo denominador, e sabendo que, para isso, é necessário obter frações equivalentes, pois foi abordado na primeira ação de aprendizagem, agora, os

---

10 TALIZINA, N. F. **La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares**. Moscu: Editorial Progresso, 1987.

alunos devem ir em busca de um modelo de como obter frações equivalentes para realizar a operação de adição quando os denominadores não forem iguais.

Para isso, a seguinte pergunta deve ser feita aos alunos:

- **Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?**

Essa pergunta tem como objetivo introduzir o conceito de fração, e criar uma base para desenvolver um modelo gráfico e literal para obter frações equivalentes.

Diante disso, será promovida uma discussão entre a turma, levando-os a perceber que medir, segundo o nosso referencial teórico Caraça (2002, p. 29) "[...] consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes etc."

Dessa forma, serão entregues, a cada grupo, dois barbantes, um com 40 (quarenta) centímetros e o outro com 5 (cinco) centímetros, tal como mostra a figura 9:

Figura 9 – Barbantes

Fonte: elaborado pela autora.

Sendo assim, não será mencionado o comprimento dos barbantes, mas os alunos devem obter uma fração que representa a medida do comprimento menor em relação ao maior.

Após a entrega dos barbantes será dito aos alunos:

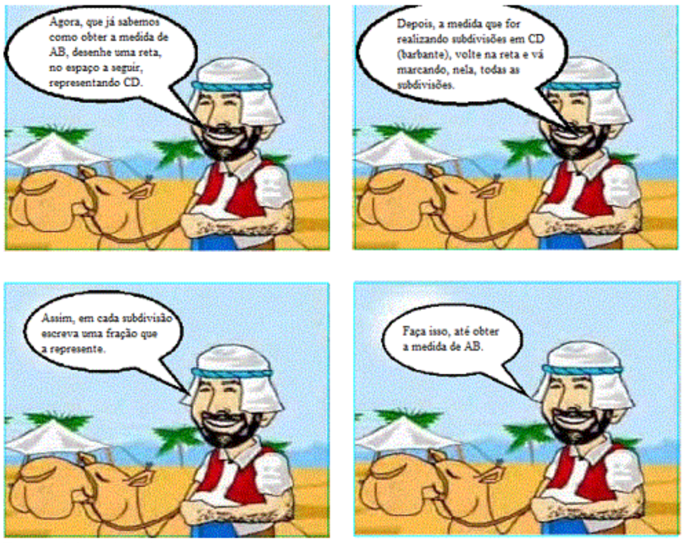
- **Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?**

Essa tarefa de aprendizagem consiste em tomar CD como unidade de medida para obter qual é o tamanho de AB, ou seja, por meio de um diálogo e reflexão, os alunos devem perceber para identificar a mediada de AB, é necessário obter um número de vezes que AB cabe em CD. Assim, será possível obter uma fração que representa a medida de AB em relação a CD e, para isso, segundo o nosso referencial teórico, Caraça (2002), devem ser realizadas subdivisões em CD até que coincida com AB.

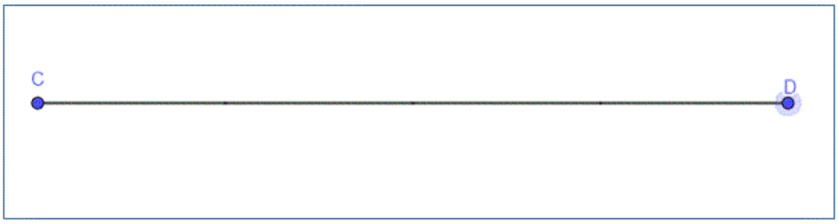
Sabendo que é necessário realizar subdivisões em CD para obter a medida de AB, os alunos devem registrar, na atividade impressa, todas as subdivisões. Dessa forma, primeiramente será pedido aos alunos que façam uma representação, na atividade impressa, do comprimento CD.

A figura 10 ilustra uma possível representação:

Figura 10 – Representação de CD na atividade impressa



Fonte: elaborado pela autora

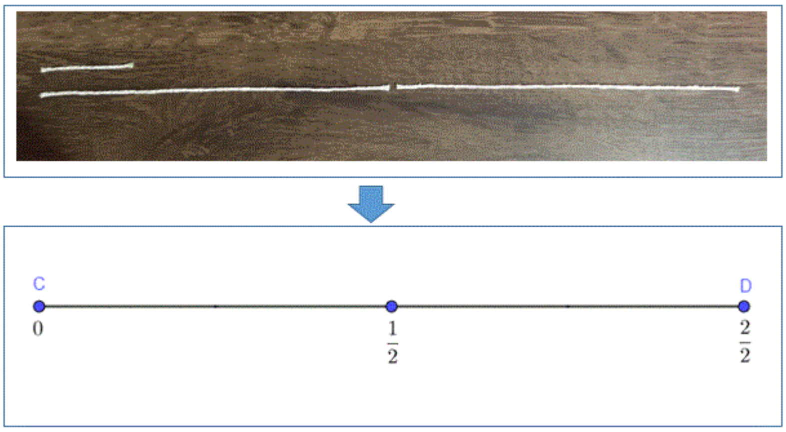


Fonte: elaborado pela autora

Dessa forma, ao passo que forem realizando as subdivisões em CD (barbante) para obter a medida de AB, devem voltar na atividade impressa e marcar em CD todas as subdivisões escrevendo uma fração que a represente. No final, será obtido o valor de AB.

A figura 11 ilustra essa ação:

Figura 11 – Subdivisões em CD (barbante)

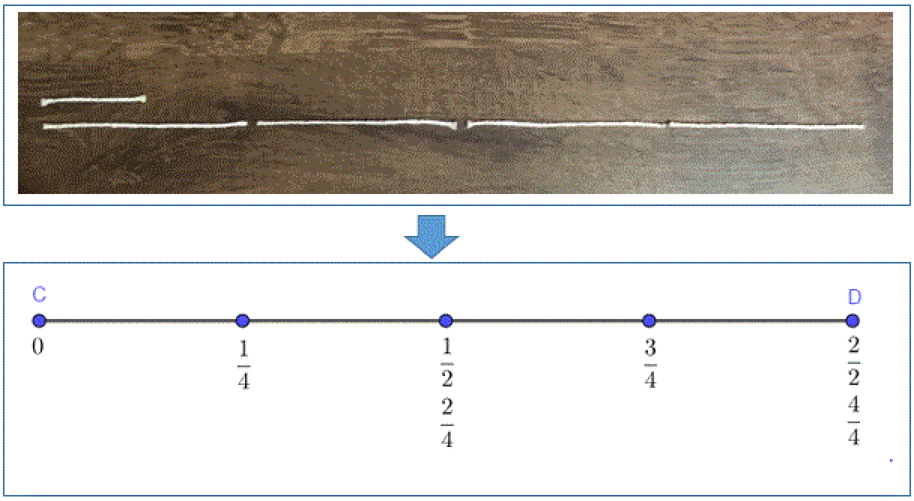


Fonte: elaborado pela autora

De acordo com a figura 11 e com o nosso referencial teórico Caraça (2002), é necessário realizar outra subdivisão em CD, já que queremos obter a medida de AB.

A figura 12 ilustra uma segunda subdivisão:

Figura 12 – Subdivisões em CD (barbante)

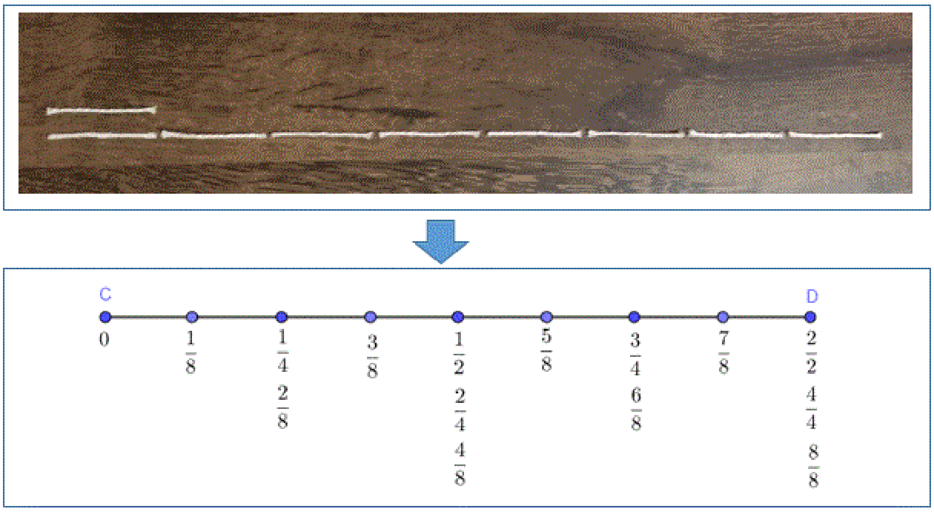


Fonte: elaborado pela autora

Novamente, de acordo com a figura 12 e com o nosso referencial teórico Caraça (2002), é necessário realizar outra subdivisão em CD, já que queremos obter a medida de AB.

A figura 13 ilustra uma terceira subdivisão:

Figura 13 – Subdivisões em CD (barbante)



Fonte: elaborado pela autora

De acordo com a figura 13, temos que a medida de AB = $\frac{1}{8}$ de CD.

Após, encontrarem a medida de AB, os alunos devem escrever na atividade impressa, o que compreenderam sobre o conceito de fração, tal como mostra a figura 14:

Figura 14 – O que você compreende sobre o conceito de fração?

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, deverão reescrever, na atividade impressa, as frações que obtiveram ao subdividir CD, conforme ilustra a figura 15:

Figura 15 – Reescrever no quadro as frações obtidas ao subdividir CD

$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{4}, \frac{2}{8}$	$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$	$\frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$

Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, os resultados serão discutidos entre a turma. Assim, será perguntado aos alunos:

- **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante), tomando o cordão maior como unidade de medida do cordão menor, o que vocês compreendem sobre o conceito de fração?**

Por meio de uma discussão e reflexão os alunos devem compreender que o conceito de fração é obtido ao se comparar duas grandezas, sendo neste caso a grandeza de comprimento. Dessa forma, podemos considerar que a fração é resultado da comparação entre dois comprimentos quando um deles é tomando como unidade de medida do outro. Assim, neste caso, CD não foi suficiente para obter a medida de AB, sendo necessário subdividi-lo.

Posteriormente, será realizada uma outra pergunta. Esta tem como objetivo construir o modelo da relação geral do objeto de estudo, ou seja, como obter frações equivalentes:

- **Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?**

Sendo assim, por meio de uma análise e reflexão, os alunos devem compreender que quanto mais se divide CD, mais frações equivalentes as anteriores podem ser estabelecidas. Assim, os estudantes devem identificar, e se apropriar, que as frações equivalentes podem ser obtidas ao multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número. Por exemplo, ao analisarem as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$, devem perceber que, para obter a fração equivalente a $\frac{1}{2}$, podem multiplicar o seu denominador e numerador pelo número 2 (dois), encontrando a fração $\frac{2}{4}$. Ou, também, podem multiplicar os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número 4 (quatro).

Além disso, utilizando a operação de divisão, é possível encontrar frações equivalentes, por exemplo, ao dividir os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número 2 (dois). Ou, se dividirmos, o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{8}$ por um mesmo número 4 (quatro) obtêm-se a fração $\frac{1}{2}$, que é sua fração equivalente. Portanto, de forma literal, os alunos devem compreender que, para encontrar frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores de uma fração pelo o mesmo número.

AÇÃO 3 – Aula 7

Fonte: elaborado pela autora.

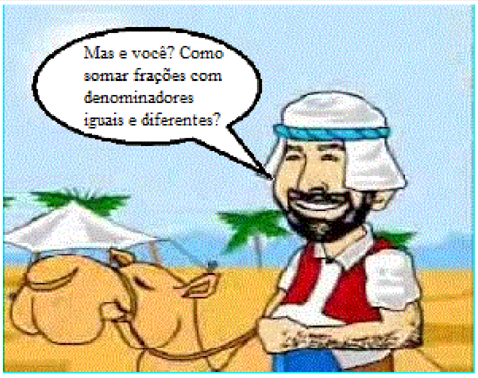
Eu e o meu amigo Bagdáli, após resolvermos o problema dos camelos, fomos para Bagdá. Ao chegarmos na cidade, fomos à uma pizzaria e pedimos duas pizzas. Pedimos uma pizza de sabor bacon, que estava dividida em 2 partes iguais e a outra com sabor calabresa, que estava dividida em 6 pedaços iguais. A pizza de bacon eu comi a metade e a pizza de calabresa eu também comi a metade.

Desenhe a seguir as duas pizzas, representando a quantidade que Beremiz comeu.

PIZZA DE BACON **PIZZA DE CALABRESA**

Quando fomos embora da pizzaria, eu perguntei ao meu amigo Bagdáli qual é a fração que representa a quantos pedaços iguais de pizza que eu comi. Bagdáli disse que essa fração é igual a $\frac{4}{8}$. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?

Depois disso, eu perguntei para Bagdáli qual é a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza de calabresa eu e ele comemos juntos. Como se sabe eu comi 3 pedaços, já o Bagdáli comeu todo o restante. Diante disso, Bagdáli afirmou que comemos juntos $\frac{6}{12}$ da pizza. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?



Fonte: elaborado pela autora.

O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes?

DENOMINADORES IGUAIS **DENOMINADORES DIFERENTES**

Fonte: elaborado pela autora.

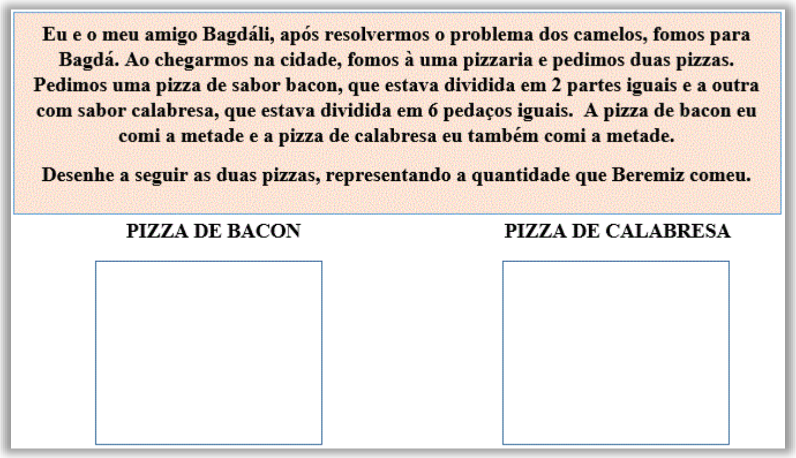
ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em introduzir mudanças na relação geral, provocando uma descaracterização no objeto, podendo vir a causar consequências (FREITAS, 2016). Assim, os alunos, percebendo essa irregularidade, reforçam a base genética do objeto e, segundo o nosso referencial teórico Freitas (2016, p. 413) “[...] identificam seu vínculo com relações particulares que interferem na forma pela qual se apresenta na realidade e compreendem que está sujeita a um processo de transformação”.

Diante disso, a primeira e única aula desta ação consiste na apresentação de uma situação particular em que se pode encontrar a adição de fração com denominadores iguais e diferentes, que é ao se comer pizza. Nesse sentido, tarefas de aprendizagem serão propostas objetivando que verifiquem situações onde os denominadores das frações foram somados, cujas situações alterarão o resultado e ocasionarão uma descaracterização do objeto. Sendo assim, para se ter o resultado correto, devem perceber que não se pode somar os denominadores das frações, mas recorrer a frações equivalentes ou conservá-los, quando os denominadores forem iguais.

Assim, a tarefa de aprendizagem inicia com Beremiz Samir afirmando que, após a resolver o “Problema dos Camelos”, ele e seu amigo Bagdáli foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas, uma de sabor bacon e, a outra sabor, calabresa. A pizza de bacon estava dividida em duas partes iguais e a de calabresa em seis. Sendo assim, a situação de aprendizagem diz que Beremiz Samir comeu a metade da pizza de bacon e a metade da pizza de calabresa. Diante disso, os alunos precisarão representar geometricamente essa situação. A figura 16 ilustra o que se pede nesta primeira tarefa de aprendizagem:

Figura 16 – A primeira tarefa da terceira ação de aprendizagem segundo Davydov (1988)


Eu e o meu amigo Bagdáli, após resolvermos o problema dos camelos, fomos para Bagdá. Ao chegarmos na cidade, fomos à uma pizzaria e pedimos duas pizzas. Pedimos uma pizza de sabor bacon, que estava dividida em 2 partes iguais e a outra com sabor calabresa, que estava dividida em 6 pedaços iguais. A pizza de bacon eu comi a metade e a pizza de calabresa eu também comi a metade.

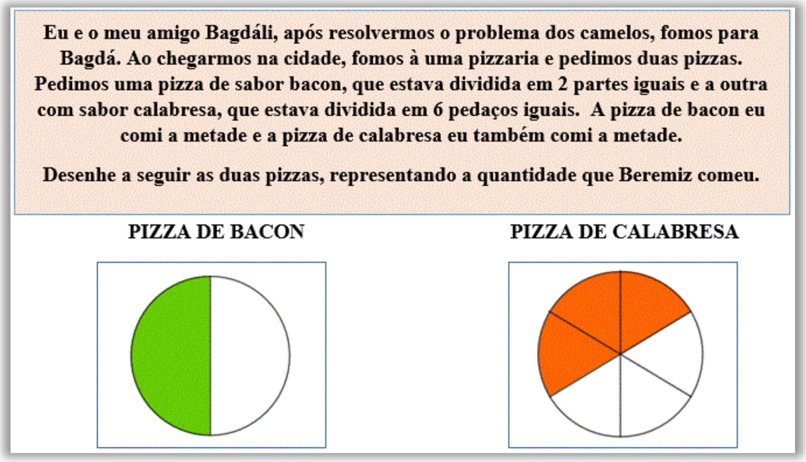
Desenhe a seguir as duas pizzas, representando a quantidade que Beremiz comeu.

PIZZA DE BACON | **PIZZA DE CALABRESA**

Fonte: elaborado pela autora

A figura 17 ilustra uma possível representação geométrica para a quantidade de pedaços de pizza que Beremiz Samir comeu.

Figura 17 – Ilustração da quantidade de pedaços de pizza comidos por Beremiz Samir



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Após a representação geométrica, os alunos devem discutir, em grupo, e responder a seguinte questão:

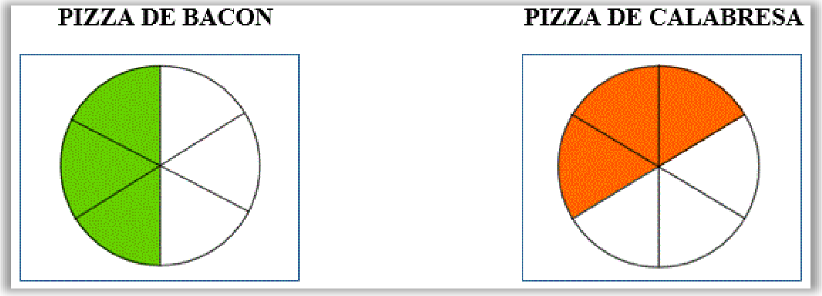
- **Quando fomos embora da pizzaria, eu perguntei ao meu amigo Bagdáli qual é a fração que representa a quantos pedaços iguais de pizza que eu comi. Bagdáli disse que essa fração é igual a $\frac{4}{8}$. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**

Para sabermos se a fração $\frac{4}{8}$ está correta, basta somarmos as frações que correspondem a quantidade de pizza que Beremiz Samir comeu, ou seja, somar $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}$. Como são frações com denominadores diferentes é necessário estabelecer um denominador comum. Assim, podemos utilizar a modelação literal estabelecida na ação de aprendizagem anterior, multiplicando o denominador e o numerador da fração $\frac{1}{2}$ por um mesmo número 3 (três).

$$\frac{1x3}{2x3}=\frac{3}{6}$$

Diante disso, temos que a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é a fração $\frac{3}{6}$. A figura 18 traz uma ilustração da representação geométrica dessa situação:

Figura 18 – Representação geométrica das frações ao reduzi-las a um mesmo denominador



Elaborado pela autora – Software GeoGebra

Agora podemos realizar a adição das frações que representam a quantidade de pizza comida por Beremiz Samir:

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Diante desse resultado, é possível perceber que Beremiz Samir comeu uma pizza inteira de 6 (seis) pedaços de mesmo tamanho, sendo 3 (três) fatias de pizza de Bacon e 3 (três) fatias de pizza de Calabresa. Portanto, isso confirma que Bagdáli estava errado, pois não considerou que as pizzas possuem quantidades de pedaços diferentes, cuja situação acarretaria na determinação de frações equivalentes, ou seja, recorrer a uma mesma quantidade de pedaços em ambas as pizzas (denominadores iguais) para que possa realizar a operação de adição e, por fim, responder quantos pedaços iguais de pizza foram comidos por Beremiz Samir.

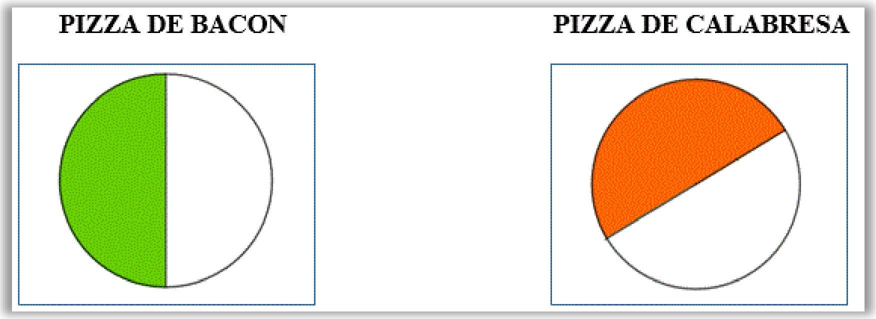
Dessa forma, ao invés disso, somou os denominadores das frações, causando consequências, já que não se pode somá-los, pois estes representam a unidade, ou seja, a pizza inteira. Assim, cada pizza não possui 8 (oito) pedaços iguais, como indica a fração $\frac{4}{8}$, mas após a redução a um mesmo denominador (mesma quantidade de pedaços em cada pizza) é possível perceber que estas possuem na verdade, 6 (seis) pedaços iguais de pizza.

Uma outra maneira de pensar esse problema é reduzindo a fração $\frac{3}{6}$ para $\frac{1}{2}$ dividindo o denominador e o numerador por 3 (três):

$$\frac{3 \div 3}{6 \div 3}=\frac{1}{2}$$

Realizando a operação de adição temos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$. Logo, temos que Beremiz Samir comeu uma pizza inteira, dividida em dois pedaços iguais, sendo a metade de bacon e a metade de calabresa, tal como ilustra a figura 19:

Figura 19 – Representação geométrica das frações ao reduzi-las a um mesmo denominador



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Após resolverem essa tarefa de aprendizagem, uma outra será proposta:

- **Depois disso, eu perguntei para Bagdáli qual é a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza de calabresa eu e ele comemos juntos. Como se sabe eu comi a metade, já o Bagdáli comeu todo o restante. Diante disso, Bagdáli afirmou que comemos juntos $\frac{6}{12}$ da pizza. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**

Para resolvermos a essa questão basta somarmos a quantidade de pizza de calabresa comida por Beremiz Samir, mais a quantidade de pizza comida por Bagdáli. Como se sabe, a pizza está dividida em 6 (seis) partes iguais, onde Beremiz Samir comeu a metade. Logo temos que a fração $\frac{3}{6}$ corresponde a essa situação. Como a pizza está dividida em 6 (seis) partes iguais e Beremiz Samir comeu a metade, temos que o restante equivale a quantidade comida por Bagdáli que é representada pela fração $\frac{3}{6}$.

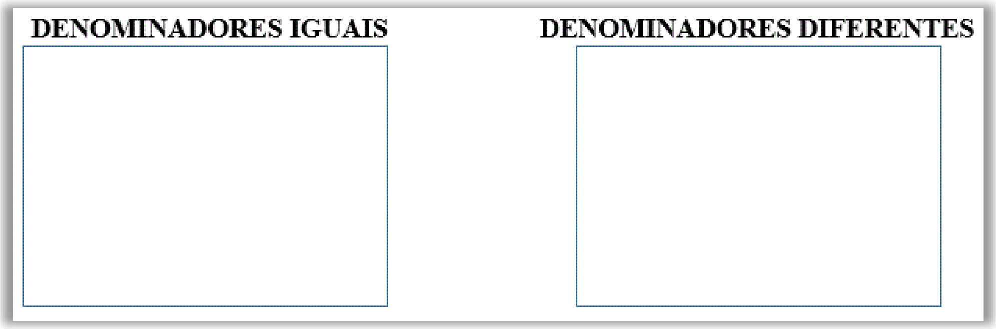
Diante disso, como queremos descobrir quantos pedaços de pizza os dois comeram juntos, basta somarmos as frações:

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Esse resultado quer dizer que ambos comeram juntos 6 (seis) pedaços de pizza de um total de 6 (seis), ou seja, comeram juntos a pizza toda. Isso implica que o resultado apontado por Bagdáli não está correto, pois somou os denominadores das frações e, como é possível notar na representação geométrica, não há 12 (doze) pedaços de pizza de calabresa.

Após responderem essa tarefa de aprendizagem, os alunos devem escrever o que compreendem sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes, tal como mostra a figura 20:

Figura 20 – O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes?



Fonte: elaborado pela autora

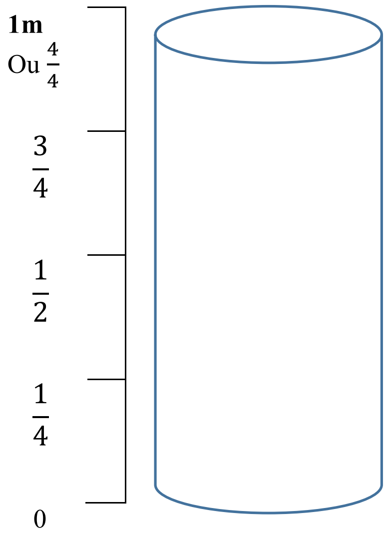
Em seguida, os resultados devem ser discutidos entre toda a turma.

Assim sendo, espera-se que, por meio de situações que alteram o resultado, causando mudanças na relação geral e provocando uma descaracterização no objeto, possam contribuir para que os alunos se apropriem do motivo pelo qual, na adição de fração, deve-se conservar o denominador quando estes forem iguais e porque deve-se recorrer a frações equivalentes quando estes forem diferentes.

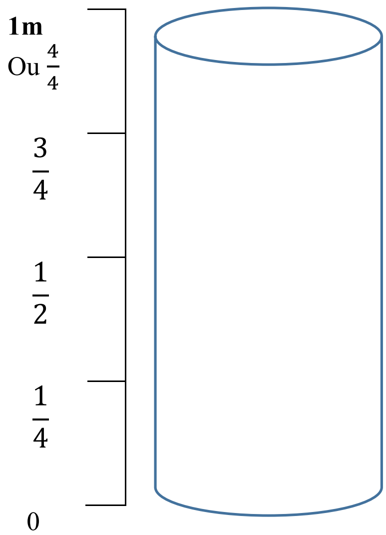
Outro ponto a destacar é que sabemos o “Problema dos Camelos” não menciona que Beremiz Samir e Bagdáli foram a uma pizzaria após a solução do problema. Dessa forma, criamos as tarefas de aprendizagem apresentadas anteriormente a fim de ilustrar uma situação particular que envolvesse o objeto de estudo.

AÇÃO 4 – Aula 8

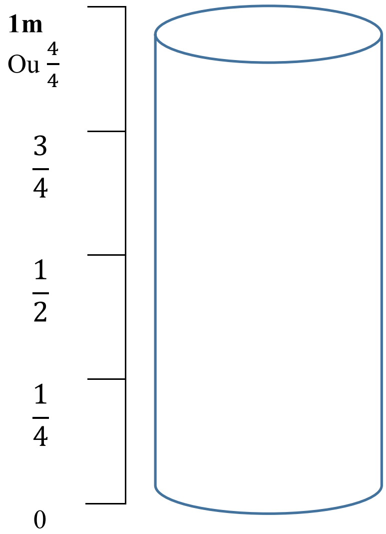
Atividade 1



1.No caso ao lado até quantos metros o nível da água do Rio Nilo pode subir? Qual é a fração que representa esse caso? Pinte no desenho ao lado a representação dessa situação.

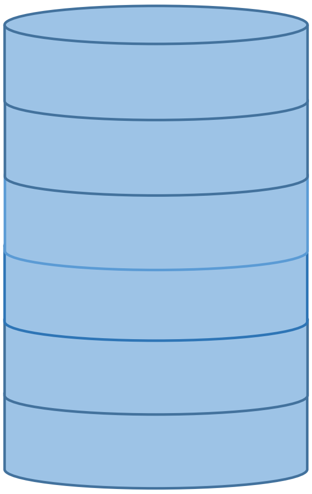


2.Qual é a fração que representa a metade do nível da água? Pinte no desenho ao lado a representação dessa situação. Existe uma outra fração que pode representar a fração que ilustra a metade do nível da água? Observe o padrão das frações na reta numérica ao lado e tente explicar.

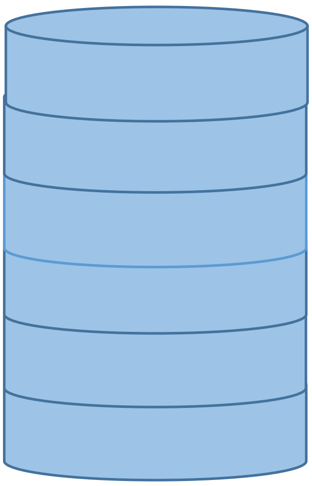


3. De quanto em quanto o nível da água está subindo? Escreva a fração que representa essa situação. Por que você acha que essa fração representa a quantidade de água que está subindo? Explique.

A seguir temos uma outra representação do nível de água do Rio Nilo. Faça uma reta numérica ao lado das figuras a seguir representando o nível de água do Rio Nilo sabendo que o máximo que suas águas podem subir é 1 metro.

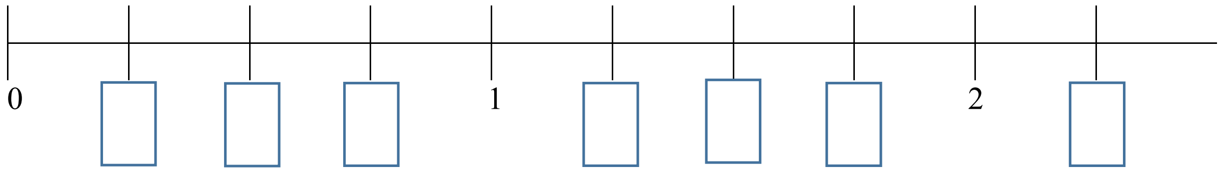


4. Qual é a fração que representa a metade do nível da água? Existe uma outra forma de representar essa fração? Por que essa fração pode ser escrita dessa forma? Pinte o desenho ao lado representando a metade no nível da água.

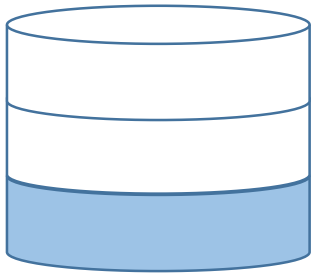


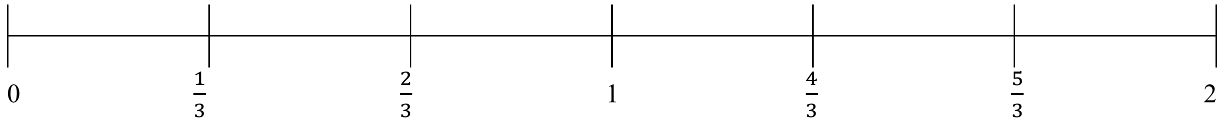
5. De quanto em quanto o nível da água está subindo? Escreva a fração que representa essa situação. Por que você acha que essa fração representa a quantidade de água que está subindo? Explique.

6. Sejam as subdivisões a seguir, escreva as respectivas frações.



7. Marque na subdivisão a fração que representa a figura a seguir:





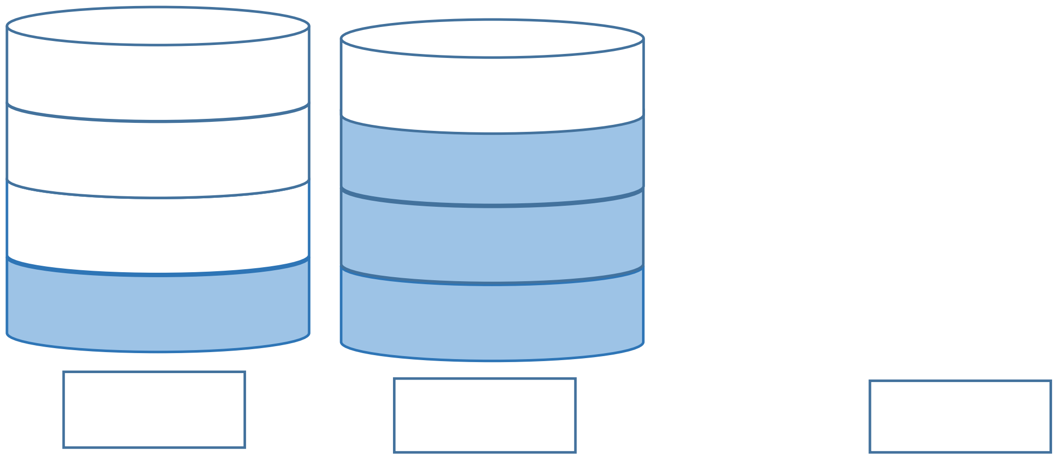
8.O que você conseguiu compreender sobre as frações nessa subdivisão?

____

____

9.Observe as seguintes imagens. A primeira ilustração mostra o nível das águas do Rio Nilo no primeiro dia da inundação e a segunda ilustração mostra o nível das águas do Rio Nilo no terceiro dia. Sabendo que o nível das águas está subindo a mesma quantidade a cada dia, represente em forma de fração cada situação e desenhe como ficaria o nível das águas do Rio Nilo no quarto dia.

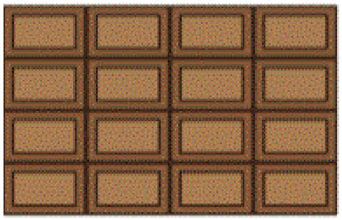
ILUSTRAÇÃO 1 **ILUSTRAÇÃO 2** **ILUSTRAÇÃO 3**



Como comprovar matematicamente que a ilustração 3, que você desenhou, está correta?

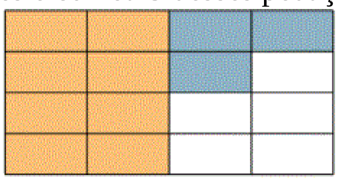
Atividade 2

(RIPOLL et al, 2017) Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Fonte: Ripoll et al, 2017

Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege), Miguel quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Fonte: Ripoll et al, 2017

Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, indicamos que as quantidades comidas são: $\frac{1}{2}$ por Alice e $\frac{3}{16}$por Miguel. Os pedaços da barra (quebrados por Miguel de acordo com as marcações na barra) correspondem a uma subdivisão dessa unidade. Observe que ambas as frações da barra de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser obtidas a partir dessa subdivisão: Miguel comeu 3 pedaços e a quantidade comida por Alice corresponde a 8 pedaços.

a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu. $\frac{1}{2} = \frac{}{16}$

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

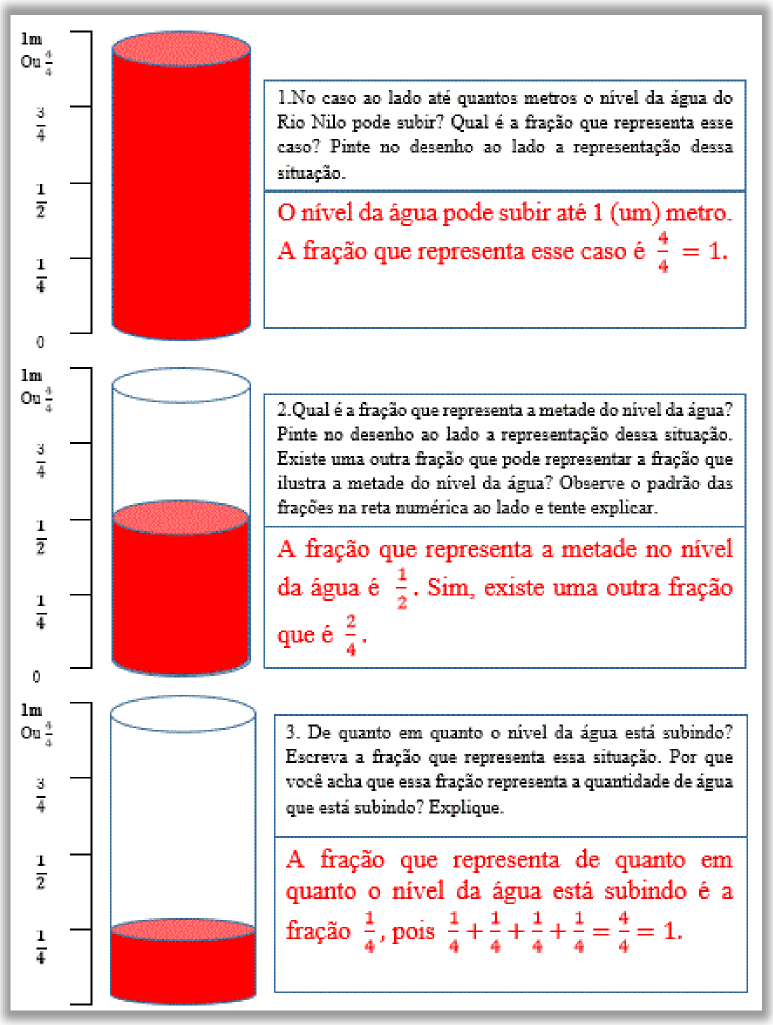
d) Que fração da barra de chocolate não foi comida

ORIENTAÇÕES:

A atividade 1, aborda situações de aprendizagem sobre as cheias do rio Nilo. Sendo assim serão trabalhados conteúdos, tais como: representação geométrica de fração, adição de fração com denominadores iguais e frações equivalentes.

Dessa forma, a seguir, a figura 21 ilustra as três primeiras questões, bem como as respostas esperadas para estas:

Figura 21 – Questões 1, 2 e 3 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

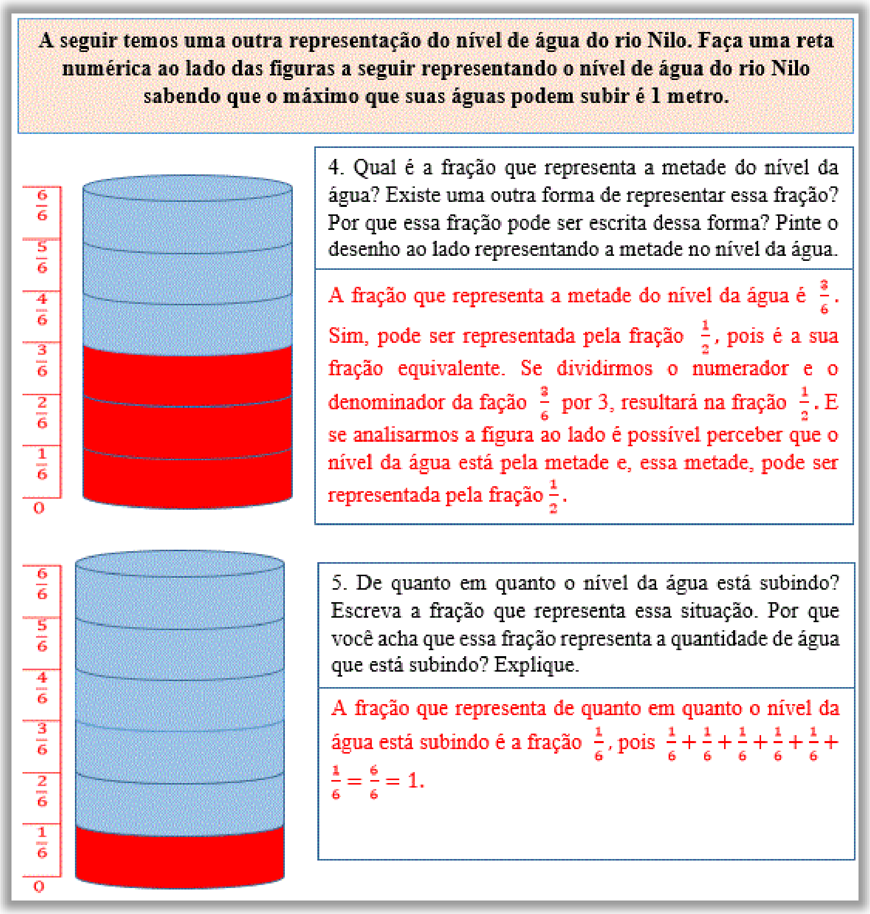
Portanto, a questão 1, consiste em pintar no desenho ao lado qual é a fração que corresponde até quantos metros o nível da água do rio Nilo pode subir. Sendo assim, esse valor corresponde a 1 (um) metro, cuja resposta indica que deve-se pintar todo desenho. Essa questão tem como objetivo que os alunos percebam, através da pintura do desenho, que a fração $\frac{4}{4}$ equivale a 1 (um), ou seja, que representa o todo.

A questão 2 se resume em determinar a fração que representa a metade do nível da água e pintar, no desenho ao lado, o seu valor correspondente. Além disso, devem indicar uma fração que representa a fração $\frac{1}{2}$, cuja resposta é a fração $\frac{2}{4}$. Diante disso, esta questão tem como propósito explorar o conceito de frações equivalentes.

Por fim, a questão 3, consiste em determinar a fração que corresponde de quanto em quanto o nível da água está subindo, cuja resposta é a fração $\frac{1}{4}$. Outro ponto a destacar é que devem comprovar que a fração $\frac{1}{4}$ é a resposta correta para essa pergunta. Sendo assim, podem realizar a seguinte operação de adição: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Como o nível da água subiu até 1 (um) metro, logo temos que a fração $\frac{1}{4}$ corresponde de quanto em quanto o nível da água do rio Nilo está subindo. Portanto, temos que o objetivo dessa terceira questão é explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais.

Prosseguindo, as atividades seguintes, bem como as suas respostas, podem ser vistas na figura 22:

Figura 22 – Questões 3 e 4 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

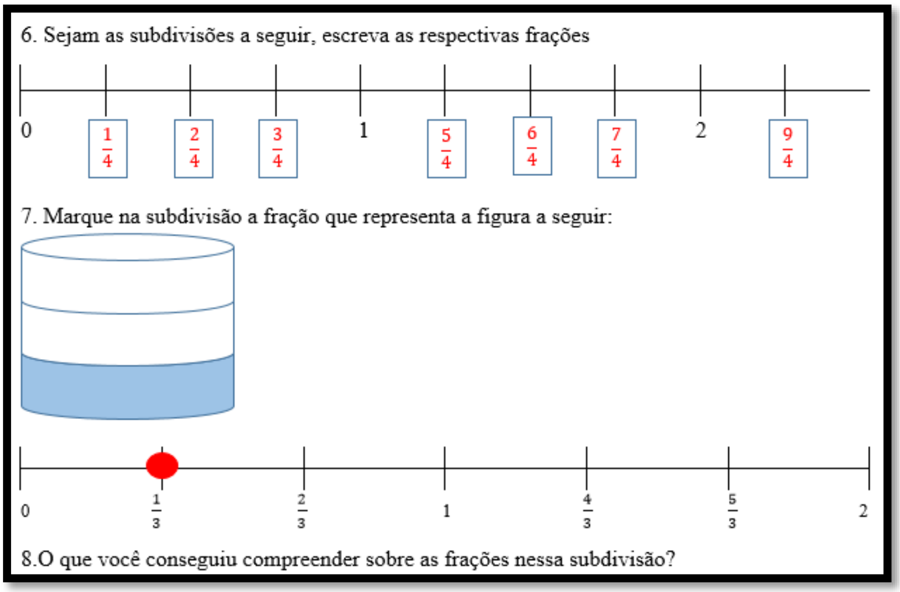
A questão 4, consiste em construir as subdivisões do desenho, e determinar a fração que representa a metade do nível da água, cuja resposta é a fração $\frac{3}{6}$. Em seguida os alunos devem pintar no desenho a parte em que corresponde a essa fração.

Uma outra forma de escrever a fração $\frac{3}{6}$, é obtendo a sua fração equivalente, dividindo o numerador e o denominador pelo número 3 (três), resultando em $\frac{1}{2}$. Portanto, a questão 4 tem como objetivo, explorar o conceito de fração equivalente.

A explicação da questão 5 é análoga a questão 3. Além disso, também tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais.

A seguir, são apresentadas as questões 6, 7 e 8. Além disso, as respostas esperadas para essas questões 6 e 7 também são ilustradas, tal como mostra a figura 23:

Figura 23 – Questões 6, 7 e 8

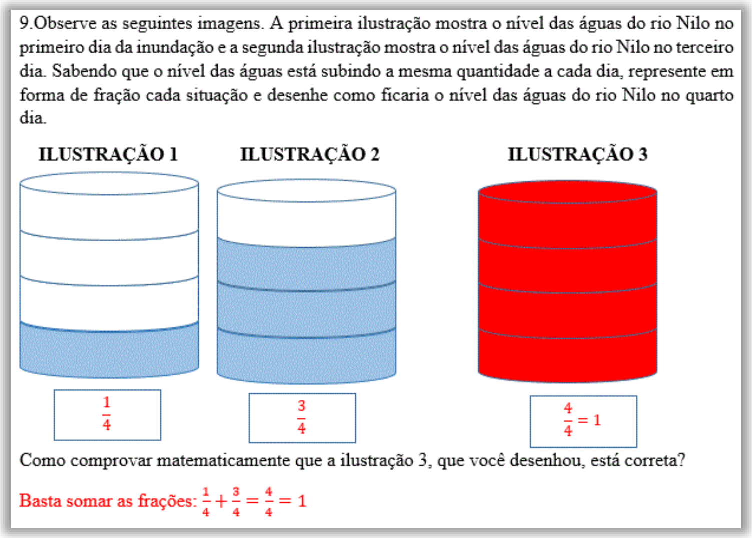


Fonte: elaborado pela autora

A questão 6, consiste em escrever qual é a fração que representa os pontos demarcados pelos retângulos azuis. Essa questão tem como objetivo reconhecer as frações nessa subdivisão, além de compreender que há frações onde os numeradores são maiores que os denominadores. A questão 7, baseia-se em visualizar a ilustração geométrica e reconhecer que esta pode ser representada pela fração $\frac{1}{3}$ na subdivisão. A questão 8, consiste em escrever a compreensão de fração nessa subdivisão.

Prosseguindo, a próxima questão, bem como a sua resposta esperada, é ilustrada na figura 24 a seguir:

Figura 24 – Questão 9 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

A questão 9 consiste em identificar a fração que corresponde qual é o nível das águas no quarto dia, sabendo que este está aumentando com a mesma proporção. Dessa forma, como a ilustração 1 representa o primeiro dia, temos que a fração, que corresponde o aumento gradativo das águas, é $\frac{1}{4}$. Sendo assim, como queremos saber qual é a fração que corresponde ao nível das águas no quarto dia, basta analisar a ilustração 2, que representa o terceiro dia do nível das águas, cuja fração é $\frac{3}{4}$. Assim, se somamos as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, o resultado é $\frac{4}{4}$, ou seja, no quarto dia as águas terão aumentado 1 (um) metro. Por fim, deverão representar geometricamente essa situação como mostra a ilustração 3. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais e a representação geométrica e numérica de fração.

Um ponto a destacar é que as situações de aprendizagem envolvendo as cheias do rio Nilo são ilustrativas, ou seja, não significam que ocorreram da maneira como são descritas nas tarefas. Dessa forma, isso será mencionado pela pesquisadora e, posteriormente, trará essa ilustração para a realidade, mencionando porque acontecem as cheias dos rios e lagos.

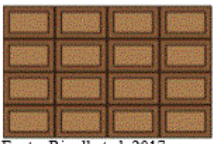
Sendo assim, as cheias ocorrem devido ao volume pluviométrico excessivo (as chuvas). Essa situação, em consonância com a retirada da cobertura vegetal natural (e.g., realização de atividades antropogênicas), ocasiona um desequilíbrio nos processos físicos, químicos e biológicos dos sistemas naturais, facilitando as enchentes (MARTEN; MINELLA, 2002).

Prosseguindo, a **atividade 2**, consiste em explorar situações relacionadas a uma barra de chocolate. Assim, as questões que serão expostas a seguir foram elaboradas por Ripoll et al (2017) e, as utilizamos, pois acreditamos que podem contribuir para a construção conceitual sobre fração “[...] e a conduzir os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão [...] e a levá-los a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados” (RIPOLL et al, 2017, p. 5).

Sendo assim, a seguir apresentaremos as questões sobre a barra de chocolate, bem como as suas respostas esperadas, tal como mostra a figura 25:

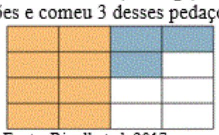
Figura 25 – Questões “a” e “b” sobre a barra de chocolate

1 (RIPOLL et al, 2017) Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Fonte: Ripoll et al, 2017.

Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege). Miguel quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Fonte: Ripoll et al, 2017

Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, indicamos que as quantidades comidas são: $\frac{1}{2}$ por Alice e $\frac{3}{16}$ por Miguel. Os pedaços da barra (quebrados por Miguel de acordo com as marcações na barra) correspondem a uma subdivisão dessa unidade. Observe que ambas as frações da barra de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser obtidas a partir dessa subdivisão: Miguel comeu 3 pedaços e a quantidade comida por Alice corresponde a 8 pedaços.

a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?
A barra de chocolate possui, ao todo, 16 retângulos de chocolate. Assim, se tomarmos 1 pedaço da barra, teremos que a fração que corresponde a essa situação é a fração $\frac{1}{16}$.

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$$

Fonte: elaborado pela autora

A questão “a” consiste em responder qual é a fração que corresponde a um pedaço da barra de chocolate. Dessa forma, como a barra de chocolate possui 16 retângulos de chocolate temos que a fração que corresponde a essa situação é a fração $\frac{1}{16}$. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o significado da relação parte/todo.

Já a questão “b”, é necessário identificar o numerador da fração, representando a quantidade da barra de chocolate que foi comida por Alice. Dessa forma, essa questão tem como objeto reconhecer $\frac{1}{2}$ é equivalente a fração $\frac{8}{16}$.

A seguir, na figura 26, serão apresentadas as questões “c” e “d”, sobre a barra de chocolate, bem como as suas respostas esperadas.

Figura 26 – Questões “c” e “d” sobre a barra de chocolate

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

Alice comeu $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate e Miguel comeu $\frac{3}{16}$. Para sabermos qual é a fração da barra de chocolate que foi comida por Alice e por Miguel, juntos, basta somarmos $\frac{1}{2}$ mais $\frac{3}{16}$: Como são denominadores diferentes, é necessário reduzi-los a um mesmo valor em comum. Para isso, basta analisarmos o desenho para perceber que a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é a fração $\frac{8}{16}$, ou multiplicar o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{2}$ pelo número 8: $\frac{1x8}{2x8} = \frac{8}{16}$. Assim, temos que, $\frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$. Portanto, Alice e Miguel comeram, juntos, $\frac{11}{16}$ da barra de chocolate.

d) Que fração da barra de chocolate não foi comida?

A barra de chocolate, ao todo, pode ser representada pela fração $\frac{16}{16}$. Diante disso, para responder qual é a fração da barra de chocolate não foi comida, basta subtrair a fração que corresponde a quantidade da barra de chocolate comida por Alice e Migue, juntos, da fração que corresponde a quantidade total da barra de chocolate: $\frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$.

Fonte: elaborado pela autora

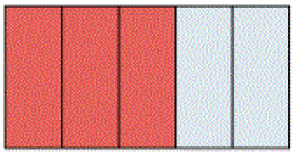
A questão “c” consiste em obter a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida por Alice e Miguel, juntos, cuja resposta é a fração $\frac{11}{16}$. Assim, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, pois é necessário somar a fração $\frac{1}{2}$, que corresponde a quantidade da barra de chocolate comida por Alice, com a fração $\frac{3}{16}$ que corresponde a quantidade comida por Miguel. Como as frações possuem denominadores diferentes, é necessário recorrer a obtenção de uma fração equivalente reduzindo, por fim, os denominadores a uma mesma unidade.

A questão “d” solicita a identificação da fração que representa quanto da barra de chocolate não foi comida. Para isso, basta subtrair, da fração que representa toda a barra de chocolate, a fração $\frac{11}{16}$, resultando na fração $\frac{5}{16}$. Sendo assim, essa questão consiste em aplicar o conceito de subtração de fração com denominadores iguais em uma situação particular.

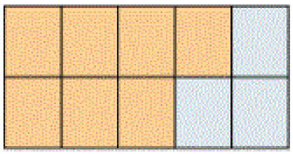
AÇÃO 4 – Aula 9

Atividade 3

(RIPOLL et al, 2017) Tendo como unidade um mesmo retângulo, as representações das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ estão ilustradas nas figuras a seguir.



Fonte: Ripoll et al, 2017



Fonte: Ripoll et al, 2017

a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.

b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Atividade 4

1. (Elaborado pela autora) Todos os dias, Ana pedala 9 km até chegar em sua escola. Certo dia, o pneu de sua bicicleta furou completados $\frac{1}{3}$ do caminho. Por sorte, cerca de um quilômetro depois havia uma borracharia onde Ana empurrou a sua bicicleta até chegar no local. O pneu foi remendado e, mais que depressa, Ana pegou novamente a sua bicicleta e saiu em disparada para a escola. Completados $\frac{2}{3}$ do caminho Ana se deparou com uma feira de frutas e resolveu comprar uma maça. Por fim, depois de algum tempo, Ana chega a escola! E ainda bem que conseguiu chegar a tempo!

a) Faça uma reta numérica mostrando todo o percurso percorrido, em forma de fração, desde a casa de Ana até a escola. Além disso, na reta numérica represente em desenho a casa de Ana, o local da reta onde o pneu da bicicleta de Ana foi furado, a borracharia, a feira e a escola.

b) O pneu da bicicleta de Ana furou depois de quantos quilômetros percorridos?

c) Existe uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta furou? Explique.

d) Qual é a fração que representa a localização da borracharia?

e) Na reta numérica qual é o número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do caminho da casa de Ana até a feira?

f) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ do caminho?

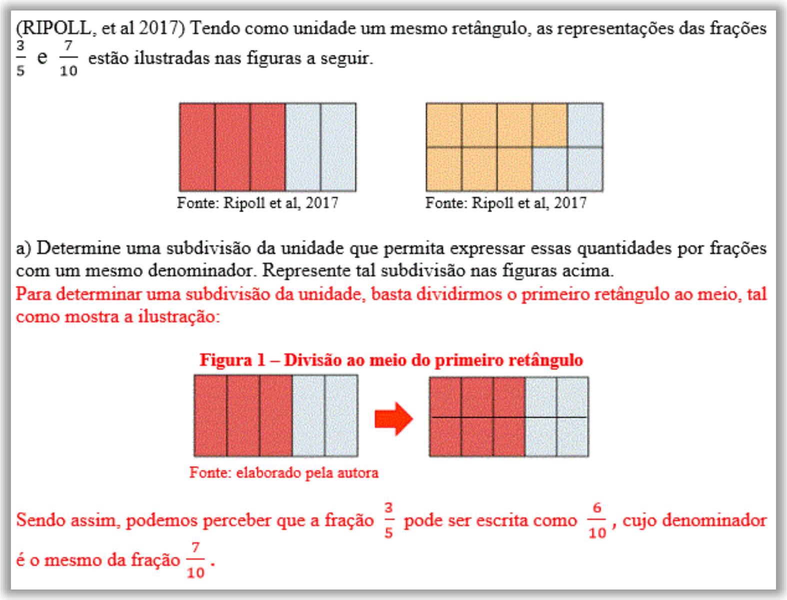
g) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{3}{9} + \frac{2}{3}$ do caminho? Explique.

ORIENTAÇÕES:

Esta aula consiste em dar continuidade a resolução de situações particulares. Sendo assim, serão propostas duas tarefas de aprendizagem: explorando as frações no retângulo, e explorando as frações no caminho para a escola.

A questão "a", bem como a sua resposta esperada, pode ser visualizada na figura 27:

Figura 27 – Questão "a" da tarefa explorando as frações no retângulo



(RIPOLL, et al 2017) Tendo como unidade um mesmo retângulo, as representações das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ estão ilustradas nas figuras a seguir.

Fonte: Ripoll et al, 2017 — Fonte: Ripoll et al, 2017

a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.

Para determinar uma subdivisão da unidade, basta dividirmos o primeiro retângulo ao meio, tal como mostra a ilustração:

Figura 1 – Divisão ao meio do primeiro retângulo

Fonte: elaborado pela autora

Sendo assim, podemos perceber que a fração $\frac{3}{5}$ pode ser escrita como $\frac{6}{10}$, cujo denominador é o mesmo da fração $\frac{7}{10}$.

Fonte: elaborado pela autora

A questão "a" tem como objeto explorar o conceito de fração equivalente, reduzindo a fração $\frac{3}{5}$ a mesma unidade da fração $\frac{7}{10}$, por meio da subdivisão do primeiro retângulo.

Continuando, as questões "b", "c" e "d", bem como as suas respostas, são ilustradas na figura 28:

Figura 28 – Questões “b”, “c” e “d” da tarefa explorando as frações no retângulo

b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

Para escrever uma fração igual $\frac{7}{10}$, basta dividirmos o segundo retângulo da seguinte maneira:

Figura 2 – Subdivisão do segundo retângulo

Fonte: elaborado pela autora

Diante disso, temos que uma fração igual a $\frac{7}{10}$ é a fração $\frac{14}{20}$. O mesmo processo pode ser utilizado para obter frações iguais a $\frac{3}{5}$. Portanto, para obter frações iguais, ou melhor, frações equivalentes, basta realizar sucessivas subdivisões na unidade.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

Uma outra forma de obter frações iguais, ou equivalentes as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, é multiplicado o denominador e o numerador de cada fração por um mesmo número. Para obter uma fração equivalente a $\frac{7}{10}$, basta multiplicar, por exemplo, o denominador e o numerador dessa fração pelo número 3. Assim, temos que a sua fração equivalente é $\frac{21}{30}$.

d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Para isso, basta somarmos a fração que corresponde ao primeiro retângulo, que é $\frac{3}{5}$, mais a fração que representa o segundo retângulo, cuja fração é $\frac{7}{10}$. Como são denominadores diferentes, é necessário recorrer a uma mesma unidade. Como se sabe, a fração $\frac{3}{5}$ é equivalente a fração $\frac{6}{10}$. Diante disso, temos que $\frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$. Portanto, como o numerador é maior que a unidade podemos considerar que as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior que um retângulo.

Fonte: elaborado pela autora

A questão “b” consiste em explorar o conceito de frações equivalentes ao subdividir as retângulos que correspondem as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$. Sendo assim, a medida em que subdivide os retângulos, mais frações equivalentes as anteriores são possíveis de obter.

A questão “c” também é relacionada ao conceito de fração equivalente. Dessa forma, para identificar frações que podem representar as $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, basta multiplicar os numeradores e os denominadores por um mesmo número.

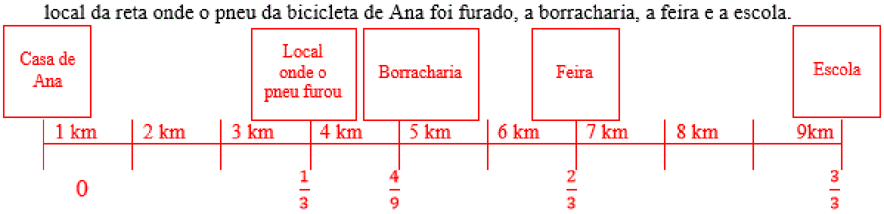
Por fim, a questão “d” constitui-se em determinar se as frações que correspondem a área vermelha e bege, juntas, determinam uma região menor, maior ou igual a um retângulo. Para responder a essa questão, basta somar as frações correspondentes as duas áreas, cuja resposta é a fração $\frac{13}{10}$. Esse resultado indica que as duas áreas juntas determinam uma região maior que um retângulo. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, o conceito de fração equivalente, e o conceito de frações impróprias, que é quando o numerador é maior que o denominador.

Prosseguindo, na figura 29, a seguir, traz a primeira questão, bem como a sua resposta, da **atividade 4:**

Figura 29 – Questão "a" da tarefa explorando as frações no caminho para a escola

1. (Elaborado pela autora) Todos os dias, Ana pedala 9 km até chegar em sua escola. Certo dia, o pneu de sua bicicleta furou completados $\frac{1}{3}$ do caminho. Por sorte, cerca de um quilômetro depois havia uma borracharia onde Ana empurrou a sua bicicleta até chegar no local. O pneu foi remendado e, mais que depressa, Ana pegou novamente a sua bicicleta e saiu em disparada para a escola. Completados $\frac{2}{3}$ do caminho Ana se deparou com uma feira de frutas e resolveu comprar uma maça. Por fim, depois de algum tempo, Ana chega a escola! E ainda bem que conseguiu chegar a tempo!

a) Faça uma reta numérica mostrando todo o percurso percorrido, em forma de fração, desde a casa de Ana até a escola. Além disso, na reta numérica represente em desenho a casa de Ana, o local da reta onde o pneu da bicicleta de Ana foi furado, a borracharia, a feira e a escola.



Fonte: elaborado pela autora

A questão "a" consiste em desenhar o caminho desde a casa de Ana até a escola de acordo com o que se pede no enunciado, a fim de criar subsídios para a compreensão do adição de fração e frações equivalentes que serão trabalhadas nas questões seguintes.

As questões "b", "c", "d", "e", "f" e "g", bem como as suas respostas, podem ser visualizadas na figura 30, a seguir:

Figura 30 – Questões "b", "c", "d", "e", "f" e "g" da tarefa explorando as frações no caminho para a escola

b) O pneu da bicicleta de Ana furou depois de quantos quilômetros percorridos?
O pneu da bicicleta de Ana furou depois de 3km percorridos.
c) Existe uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta furou? Explique.
Sim, a sua fração equivalente, que é $\frac{3}{9}$
d) Qual é a fração que representa a localização da borracharia?
A fração que representa a localização da borracharia é $\frac{4}{9}$
e) Na reta numérica qual é o número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do caminho da casa de Ana até a feira?
O Número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do cominho é o número 6, pois Ana terá percorrido 6 quilômetros até feira.
f) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ do caminho?
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Sendo assim, a fração $\frac{2}{3}$ indica que Ana se localiza na feira.
g) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{3}{9}+\frac{2}{3}$ do caminho? Explique.
Como são frações com denominadores diferentes, é necessário reduzi-las a uma mesma unidade. Para isso, basta observar a reta numérica para perceber que $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Sendo assim, agora, é possível realizar a operação de adição $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}$. Portanto, a fração $\frac{3}{3}$ indica que Ana estará na escola.

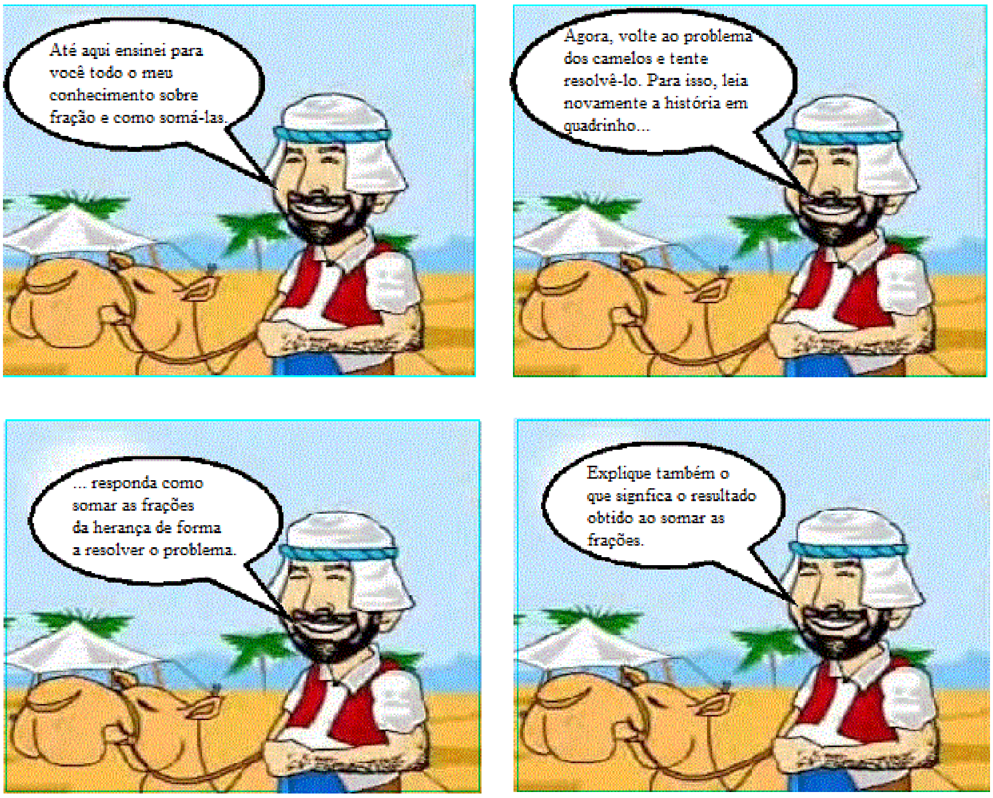
Fonte: elaborado pela autora

Na questão “b”, basta analisar o desenho realizado na letra “a”, a fim de identificar com quantos quilômetros percorridos o pneu da bicicleta de Ana furou. Assim, a fração que indica essa situação é $\frac{1}{3}$. Logo, a resposta é que o pneu furou depois de 3 (três) quilômetros percorridos. Portanto, esta questão tem como objeto explorar o conceito de fração equivalente, pois a unidade possui 9 (nove) repartições e, também, pode ser subdividida em 3 (três). Sendo assim, a fração que seria $\frac{3}{9}$ pode ser escrita como $\frac{1}{3}$, o que facilita responder que o pneu da bicicleta de Ana furou com 3 (três) quilômetros percorridos.

A questão “c” resume-se em determinar uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$, ou seja, se há uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta de Ana furou. Dessa forma, ao analisarmos o desenho realizado na letra “a”, é possível perceber que a sua fração equivalente é $\frac{3}{9}$.

Por fim, as questões “d” e “e” tem como objetivo explorar a localização das frações desde a casa de Ana até a escola. Em seguida, a questão “f” consiste em trabalhar a adição de fração com denominadores iguais e, a última questão, visa explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes.

AÇÃO 5 – Aula 10



Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa visa o monitoramento das ações realizadas anteriormente por meio de um exame qualitativo, ou seja, “[...] equivale à avaliação dos alunos por si próprios, tendo como referência o conteúdo de suas ações [...]” (FREITAS, 2016, p. 414-415).

Dessa forma, antes da avaliação, os alunos voltarão ao “Problema dos Camelos”, a fim de solucioná-lo. Assim, espera-se que, baseando-se nos conhecimentos apropriados nas ações de aprendizagem anteriores, os alunos possam, agora, não somente utilizar a operação de adição com denominadores diferentes, mas compreender a sua essência. Nesse sentido, ao somar as frações da herança, objetiva-se que os alunos compreendam que é necessário reduzir os denominadores das frações a uma mesma unidade, recorrendo ao conceito de frações equivalentes, tal como mostra a figura 31:

Figura 31 – Somando as frações da herança recorrendo a frações equivalentes

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=?$$

Vamos somar, primeiro, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Como são denominadores diferentes, devemos reduzi-los a uma mesma unidade. Para isso basta multiplicar a fração $\frac{1}{2}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{3}$ e, em seguida, multiplicar a fração $\frac{1}{3}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1x3}{2x3}+\frac{1x2}{3x2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Agora, iremos somar a fração $\frac{5}{6}$ com a fração $\frac{1}{9}$ que restou. Como são denominadores diferentes, devemos reduzi-los a uma mesma unidade. Para isso basta multiplicar a fração $\frac{5}{6}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{9}$ e, em seguida, multiplicar a fração $\frac{1}{9}$ pelo denominador da fração $\frac{5}{6}$:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5x9}{6x9}+\frac{1x6}{9x6}=\frac{45}{54}+\frac{6}{54}=\frac{51}{54}$$

Podemos simplificar essa fração, dividindo o numerador e o denominador por 3 (três):

$$\frac{51\div 3}{54\div 3}=\frac{17}{18}\text{. Logo, }\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

Fonte: elaborado pela autora

Ao obter a fração $\frac{17}{18}$, os alunos devem explicar o seu significado em relação a resolução do problema. Assim, como nas ações de aprendizagem anteriores foi abordada a fração representando tanto numérica quanto geometricamente a unidade, espera-se que os alunos compreendam que a fração $\frac{17}{18}$ não equivale ao todo, ou seja, falta $\frac{1}{18}$ para completar o todo. Neste caso, o todo é a herança dos 35 camelos:

> Tudo resultou, em resumo, do fato seguinte: Houve um erro do testador. A metade de um todo, mais a terça parte desse todo, mais um nono desse todo não é igual ao todo. Vejam: 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18. Para completar o todo, falta, ainda, 1/18 desse todo. O todo, no caso, é a herança dos 35 camelos. 1/18 de 35, é igual a 35/18. A fração 35/18 é igual a 1 e 17/18. Conclusão: feita a partilha, de acordo com o testador, ainda haveria uma sobra de 1 e 17/18. Beremiz, com o artifício empregado, distribuiu os 17/18 pelos três herdeiros (aumentando a parte de cada um) e ficou com a parte inteira da fração excedente (TAHAN, 2007, p. 1).

Após responderem ao problema, os alunos devem realizar, na atividade impressa, uma avaliação qualitativa de si próprios, tal como mostra a figura 32. Posteriormente, as soluções para o "Problema dos Camelos", bem como a avalição sobre o desempenho e o que compreenderam durante todas as aulas do experimento de ensino, serão discutidas entre a turma.

Figura 32 – Local da atividade impressa que o aluno deve realizar a avaliação qualitativa da aprendizagem

Fonte: elaborado pela autora

Após o cumprimento das ações de aprendizagem, espera-se que os alunos possam demonstrar uma apropriação do processo lógico e histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir, e do conceito do nosso objeto de estudo que é a adição de fração com denominadores diferentes, bem como a sua relação geral, que é a determinação de frações equivalentes para reduzir os denominadores a uma mesma unidade

Avaliando a aprendizagem:

A sexta ação de aprendizagem consiste em avaliar os alunos, se estes assimilaram ou não “[...] o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem correspondem, ou não, e em que medida, ao objetivo final” (DAVYDOV, 1988, p. 176). Para isso, segundo Freitas (2016), no momento da avaliação, o professor pode se orientar por uma pergunta, por exemplo, se o aluno se apropriou da relação geral do objeto e a aplica em situações particulares.

REFERÊNCIAS

BALLADARES, B. L. **Malba Tahan, matemática e histórias em quadrinhos:** Produção discente de HQs em uma colônia de pescadores. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 2002.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental:** A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Moscú: Progreso, 1988

FREITAS, R. M. M.; LIMONTA, S. V. A educação científica da criança: contribuições da teoria do ensino desenvolvimental**, Revista Linhas Críticas,** Brasília, v. 18, n. 35, p. 69-86, jan./abr. 2012.

FREITAS, R. M. M. Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para a organização do ensino**, Revista Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 388-418, maio/ago. 2016.

MARTEN, G. H.; MINELLA, J. P. Qualidade da água em bacias hidrográficas rurais: um desafio atual para a sobrevivência futura. **Revista Agroecologia e Desenvolvimento Rural Sustentável**, Porto Alegre, v. 3, n. 4, p. 33-38, out/dez. 2002.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.L.B.; BORTOLOSSI, H. J.; GIRALDO, V. A.; REZENDE, W. M.; QUINTANEIRO, W. S. **Frações no ensino fundamental**: volume 1. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS), 2017.

ROSA, J. E; HOBOLD, E. S. F; BERNARDO, C. S.; CORRÊA, D. A.; INÁCIO, G. M. Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico Cultural**, REVEMAT,** Florianópolis, v. 8, n. edição especial, p. 227-245, 2013.

TAHAN, M. **O homem que calculava.** 58 ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

REFERÊNCIAS DAS IMAGENS

Figura 1 – Baremiz Samir

Fonte: matematnews. Disponível em: <http://matematnews.blogspot.com/2011/04/o-homem-que-calculava.html> Acesso em 16 de setembro de 2019.

Figura 2 – Os três irmãos da herança

Fonte: fatoseangulos. Disponível em: <http://fatoseangulosbloginfo.blogspot.com/2012/07/a-partilha-dos-35-camelos-conhecimento.html> Acesso em 17 de setembro de 2019.

Figura 3 – Beremiz Samir e o irmão mais velho

Fonte: youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Wwh81lcGU3U> Acesso em 17 de setembro de 2019.

Figura 4 - Camelos

Fonte: vivamalbatahan. Disponível em: <http://vivamalbatahan.blogspot.com/2012/09/problema-dos-35-camelos.html> Acesso em: 17 de setembro de 2019

Figura 5 – Beremiz Samir

Fonte: malbatahan. Disponível em: <https://www.malbatahan.com.br/audiovisuais/videos/> Acesso em: 17 de setembro de 2019.

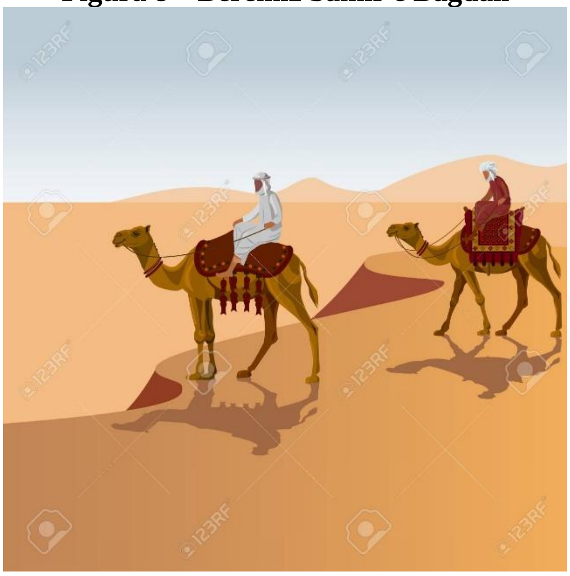
Figura 6 – Beremiz Samir e o irmão mais novo

Fonte: matematiqueza. Disponível em: <http://matematiqueza.blogspot.com/> Acesso em: 17 de setembro de 2019.

Figura 7 – Os três irmãos da herança (figura 2 ampliada)

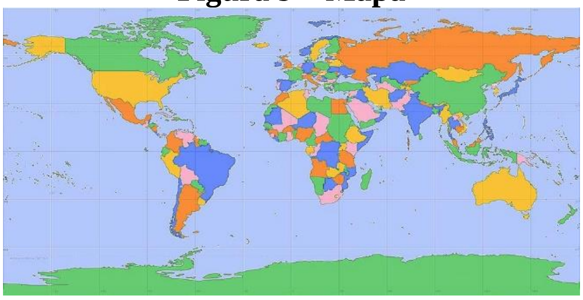
Fonte: pibidmat. Disponível em: <http://1pibidmat.blogspot.com/2013/04/video-malba-tahan-partilha-dos-35.html> Acesso em: 17 de setembro de 2019.

Figura 8 – Beremiz Samir e Bagdáli



Fonte: 123rf. Disponível em: <https://br.123rf.com/photo_87337919_dois-homens-%C3%A1rabes-andando-de-camelo-no-deserto-ilustra%C3%A7%C3%A3o-do-vetor.html> Acesso em: 18 de setembro de 2019.

Figura 9 – Mapa

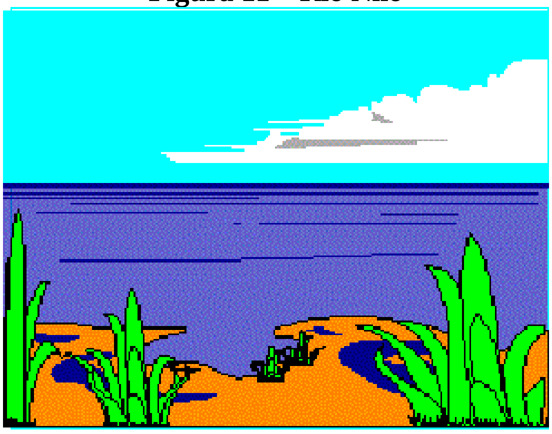


Fonte: Painel Global. Disponível em: <http://www.painelglobal.com.br/>Acesso em: 14 de outubro de 2017.

Figura 10 – Imagem de satélite do Egito

Fonte: falando sobre seres humanos. <http://falandosobreseresumanos.blogspot.com.br/2015/05/alexandria.html>. Acesso em: 14 de outubro de 2017.

Figura 11 – Rio Nilo

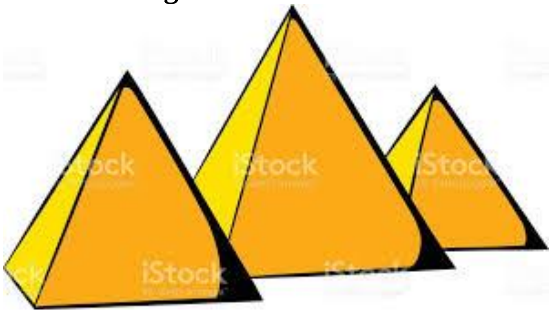


Fonte: software HagáQuê

Figura 12 – Pirâmides

Fonte: Depositphotos. Disponível em: <https://pt.depositphotos.com/9797887/stock-illustration-cartoon-nature-landscape-pyramid.html>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 13 – Pirâmides



Fonte: Istock. Disponível em: <http://www.istockphoto.com/br/vetor/desenhos-animados-de-%C3%ADcone-de-pir%C3%A2mides-eg%C3%ADpcias-gm696028850-128834901>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

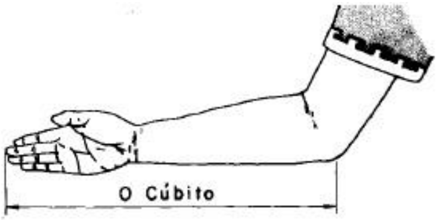
Figura 14 - Faraó

Fonte: Depositphotos. <https://pt.depositphotos.com/18477731/stock-illustration-cartoon-pharaoh.html>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 15 – Cordas com nós

Fonte: Dreamstime. Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/foto-de-stock-feche-acima-do-tiro-de-uma-corda-com-uns-quatro-n%C3%B3s-isolados-image6153540>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 16 – O cúbito

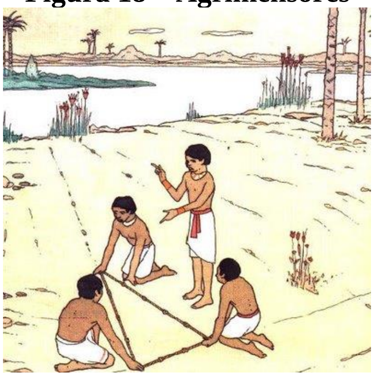


Fonte: Site Discovery. <http://discoveryef.blogspot.com.br/2017/02/metrologia-industrial-basico-como.html>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 17 – Agrimensores

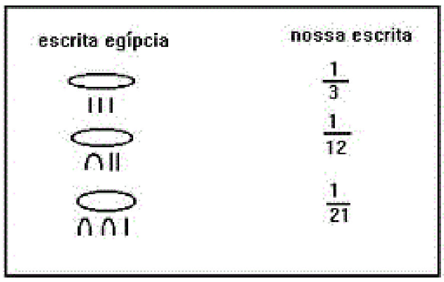
Fonte: Usuários.upf. Disponível em: <http://usuarios.upf.br/~pasqualotti/hiperdoc/natural.htm>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 18 – Agrimensores



Fonte: blogspot. Disponível em: <http://lamatematicaegipcia.blogspot.com.br/>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 19 – Frações



Fonte: Site ebah. <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAe8H8AA/matematica-fracoes>. Acesso em: 15 de out. de 2017.

APÊNDICE B – Plano de ensino

Nível escolar: Anos iniciais do ensino fundamental **Período:** 6º ano **Disciplina:** Matemática **Conceito temático:** Fração **Objeto de estudo:** Adição de fração com denominadores diferentes **Carga horária:** **Data:** 13/11/2019 até
Relação geral do objeto de estudo: A relação geral que caracteriza o núcleo do conceito de soma de fração com denominadores diferentes reside na obtenção de frações equivalentes.
Problema que norteará a atividade de estudo: “Problema dos Camelos” – Três irmãos discutem a herança que o pai deixou a eles. A herança são 35 camelos para serem divididos da seguinte forma: a metade para o irmão mais velho, a terça parte para o irmão do meio e a nona parte para o irmão mais novo. Acontece que essa partilha não é exata. Beremiz Samir, que estava passando por perto e ouvindo a discussão, oferece o camelo de seu amigo para juntar com os 35 camelos que agora são 36. Na partilha dos camelos, todos os três irmãos saem lucrando e ainda sobram dois camelos. Beremiz, então, recebeu de volta o camelo de seu amigo e ainda ganhou um camelo por ter resolvido o problema da herança. O que será que Beremiz percebeu para que pudesse juntar o camelo de seu amigo aos camelos da herança e ainda sair da situação com dois camelos? Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para concluir que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si? Como somar as frações da herança?

Etapa 1 – AULA 1 – 13/11/2019		
CONTEÚDOS	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Adição de fração com denominadores diferentes; • Representação numérica de fração.	Identificar o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, por meio da análise da história em quadrinho sobre o "Problema dos Camelos",	-Despertar o interesse do aluno para o estudo do objeto por meio da leitura da história em quadrinho sobre o "Problema dos Camelos"; -Identificar o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes; -Indicar uma forma de somar frações com denominadores diferentes.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
<u>ETAPA 1:</u> *Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo* **Questões norteadoras:** ✚ **Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?** ✚ **Como somar as frações da herança?** **Tarefas de aprendizagem:** • Identificação do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, por meio da análise da história em quadrinho e diálogo entre os grupos e a pesquisadora. • Realização de uma análise, em grupo, de como somar as frações da herança, e registrar essas informações na atividade impressa para, posteriormente, serem discutidas entre a turma e a pesquisadora.	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Borracha.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

Etapa 1 – AULA 2 – 14/11/2019		
CONTEÚDO	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

• Adição de fração com denominadores iguais; • Representação numérica de fração; • Representação geométrica de fração; • Representação numérica e geométrica de um inteiro.	Compreender, por meio da manipulação do material (barra de chocolate) e da troca e experiências uns com os outros, como se dá a representação geométrica e numérica das frações, o significado do conceito da adição de fração com denominadores iguais e a noção do inteiro.	-Compreender que as frações fazem parte do dia a dia; -Representar numericamente e geometricamente a adição de fração com denominadores iguais; -Representar numericamente e geometricamente a noção do inteiro; -Compreender, que não se deve somar os denominadores das frações; -Compreender o significado do conceito de adição de fração com denominadores iguais.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
ETAPA 1: *Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo* **Questões norteadoras:** • **Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?** • **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?** **Tarefas de aprendizagem:** • Identificação das frações no cotidiano por meio de um diálogo entre a turma e a pesquisadora. • Discussão, em grupo, para escrever uma adição, tanto numericamente quanto geometricamente, que responda qual é a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida no total. • Apresentação dos resultados e discussão sobre: como representar numericamente e geometricamente a adição de fração; o que é um	- Atividade impressa; - Lápis de cor; - Lápis de escrever; - Borracha; - Régua; - Barra de chocolate.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

inteiro e, por fim, o significado do conceito de adição de fração com denominador igual, desencadeado pela pergunta: **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?**		

Etapa 1 – AULA 3 – 18/11/2019		
CONTEÚDO	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Adição de fração com denominadores iguais; • Subtração de fração com denominadores iguais; • Formas geométricas; • Representação geométrica de fração; • Frações equivalentes.	Introduzir o conceito de fração equivalente e aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações de aprendizagem que o envolvam um Tangram, generalizando para a operação de subtração.	-Identificar a nomenclatura de formas geométricas por meio do Tangram; -Aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações de aprendizagem que envolva o Tangram; -Generalizar o conceito de adição de fração com denominadores iguais para a operação de subtração; -Compreender, com o Tangram, o conceito de frações equivalentes.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
<u>ETAPA 1:</u> *Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo* **Questões norteadoras:** • **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?** • **Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram? O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?** • **Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos? Escreva uma adição que representa essa situação, e a**	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Borracha; - Régua; - Folhas de papel A4; - Tesoura.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na

represente geometricamente. **O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?** **Tarefas de aprendizagem:** • Leitura, em grupo, da história em quadrinho sobre o Tangram. • Construção, em grupo, de um Tangram com uma folha de papel A4. • Discussão em grupo, e com a pesquisadora, para reconhecer a nomenclatura de cada figura geométrica que compõe o Tangram, e com elas formar um quadrado. • Discussão em grupo sobre as questões norteadoras. • Apresentação dos resultados e discussão sobre fração equivalente desencadeado pela pergunta: **O que significa no Tangram a fração oito dezesseis avos?**		atividade impressa.

Etapa 1 – AULA 4 – 19/11/2019		
CONTEÚDO	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Adição de fração com denominadores iguais; • Adição de fração com denominadores diferentes; • Representação geométrica de fração; • Fração equivalente.	Identificar a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.	-Identificar a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, analisando, novamente, o problema dos camelos por meio da representação geométrica de fração em papel milimetrado; -Identificar a relação de frações equivalentes como meio de realizar a operação de adição entre frações que não possuem o mesmo denominador.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
<u>ETAPA 1:</u> *Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo* **Questão norteadora:**	- Atividade impressa; - Lápis de cor; - Lápis de escrever;	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se

Nas aulas anteriores, representamos, geometricamente e numericamente, a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las. **Tarefas de aprendizagem:** • Analisar e refletir, em grupo, objetivando escrever uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las. • Apresentação dos resultados e reflexão dos conhecimentos apropriados nas aulas anteriores e nesta aula, perceber que é necessário recorrer a equivalência entre frações, que é a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.	- Borracha; - Régua; - Papel milimetrado.	estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

Etapa 2 – AULA 1 – 20/11/2019		
CONTEÚDO	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Conceito de fração; • Unidades de medida.	Compreender o processo histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir.	-Compreender que os instrumentos de medida existentes passaram por um processo de transformação, ou evolução no decorrer da história e que isso continua acontecendo. -Compreender que, para medir a sala de aula, devem ser realizadas subdivisões no cúbito. -Compreender que, para medir as terra, os egípcios faziam subdivisões do cúbito e que assim surgiu o conceito de fração, devido a uma necessidade em

		medir.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
ETAPA 2: *Modelação da relação geral do objeto de estudo* **Questões norteadoras:** - **O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?** - **Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?** **Tarefas de aprendizagem:** • Leitura da história em quadrinho (PARTE 1). Indicar algum instrumento de medida, que existe atualmente, que pode ser utilizado para medir as terras às margens do rio Nilo. • Leitura da história em quadrinho (PARTE 2). Eleger um representante do grupo para ser o faraó para tomar a medida do cúbito. Após, medir a sala de aula registrando os comprimentos na atividade impressa. Em seguida, como o cúbito não inteiro não foi suficiente para medir, indicar o que se pode ser feito no cúbito para medir a sala de aula. • Leitura da história em quadrinho (PARTE 3). Ajudar os egípcios indicando uma forma de como medir as terras utilizando o cúbito.	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Barbantes; - Tesoura	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

Etapa 2 – AULA 2 – 21/11/2019		
CONTEÚDO	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Relação entre grandezas; • Conceito de fração; • Frações equivalentes.	Introduzir o conceito de fração a partir da comparação entre duas grandezas, sendo a grandeza de comprimento, para em seguida obter um modelo da relação geral.	-Compreender, partir da história do surgimento do conceito de fração, o motivo pelo qual é necessário submeter-se a um denominador comum quando se quer realizar a operação de adição com denominadores diferentes. -Compreender que medir é

		comparar duas grandezas de mesma espécie. -Compreender que para obter a medida de AB deve-se realizar subdivisões em CD. -Compreender que, para obter frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir o denominador e o numerador de uma fração por um mesmo número.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
ETAPA 2: *Modelação da relação geral do objeto de estudo* **Questões norteadoras:** - **Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida?** - **Qual é a diferença entre os comprimentos utilizados para medir a sala de aula?** - **Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes?** - **De acordo com o que foi discutido até o momento, explique porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?** - **Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?** - **Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?** - **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante),**	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Barbantes; - Tesoura	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

tomando o cordão maior como unidade de medida do cordão menor, o que vocês compreendem sobre o conceito de fração? - **Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?** **Tarefas de aprendizagem:** • Indicar um motivo pelo qual não se utiliza o cúbito como unidade de medida. • Comparar os comprimentos que foram utilizados na aula anterior para medir a sala de aula, colocando-os um ao lado do outro destacando suas diferenças. • Relacionar o fato histórico de submeter a uma mesma unidade de com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes. • Explicar porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum. • Indicar o que é medir. • Indicar uma forma de obter a medida de AB. • Indicar o conceito de fração a partir da comparação entre duas grandezas, sendo a grandeza de comprimento. • Comparar as frações obtidas ao subdividir CD, buscando padrões e semelhança, construindo um modelo para encontrar frações equivalentes.		

Etapa 3 – AULA 1 – 25/11/2019		
CONTEÚDOS	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Adição de fração com denominadores diferentes; • Adição de fração com denominadores iguais; • Representação geométrica de fração; • Frações equivalentes.	Contribuir para que os alunos se apropriem do motivo pelo qual, na adição de fração, deve-se conservar o denominador quando estes forem iguais e porque deve-se recorrer a frações equivalentes quando	-Compreender que na adição de fração não se deve somar os denominadores; -Compreender que na adição de fração com denominadores iguais conserva-se o denominador, pois este representa o todo.

	estes forem diferentes.	-Compreender que na adição de fração com denominadores diferentes deve-se recorrer a equivalência de fração, reduzindo os denominadores a uma mesma quantidade/valor em comum.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
ETAPA 3: *Transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo a fim de estudar as suas propriedades em forma pura* **Questões norteadoras:** - **Eu e o meu amigo Bagdáli, após resolvermos o problema dos camelos, fomos para Bagdá. Ao chegarmos na cidade, fomos à uma pizzaria e pedimos duas pizzas. Pedimos uma pizza de sabor bacon, que estava dividida em 2 partes iguais e a outra com sabor calabresa, que estava dividida em 6 pedaços iguais. A pizza de bacon eu comi a metade e a pizza de calabresa eu também comi a metade. Desenhe a seguir as duas pizzas, representando a quantidade que Beremiz comeu.** - **Quando fomos embora da pizzaria, eu perguntei ao meu amigo Bagdáli qual é a fração que representa a quantos pedaços iguais de pizza que eu comi. Bagdáli disse que essa fração é igual a $\frac{4}{8}$. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?** - **Depois disso, eu perguntei para Bagdáli qual é a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza de calabresa eu e ele comemos juntos. Como se sabe eu comi 3 pedaços, já o Bagdáli comeu todo o restante. Diante disso, Bagdáli afirmou que comemos juntos $\frac{6}{12}$ da pizza. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Lápis de cor; - Régua; - Borracha.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes? **Tarefas de aprendizagem:** • Representação geométrica das frações que correspondem a quantidade de pedaços da pizza de bacon e da pizza de calabresa que foram comidos por Beremiz Samir. • Somar as frações que correspondem a quantidade de pedaços iguais de pizza que foram comidos por Beremiz Samir, a fim de verificar se a reposta de Bagdáli está correta. • Somar as frações que correspondem a quantidade de pedaços de pizza de calabresa Beremiz Samir e Bagdáli comeram juntos, a fim a de verificar se a resposta de Bagdáli está correta. • Indicar o que compreendem sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes.		
Etapa 4 – AULA 1 – 26/11/2019		
CONTEÚDOS	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Representação geométrica de fração; • Adição e subtração de fração com denominadores iguais; • Adição de fração com denominadores diferentes; • Frações equivalentes;	Resolver situações de aprendizagem particulares que podem ser expressas por um procedimento geral.	- Compreender, por meio da tarefa explorando as frações com as cheias do rio Nilo, a representação geométrica de fração, o conceito de frações equivalentes, o conceito de adição de fração com denominadores iguais e a representação geométrica e numérica de um inteiro. -Compreender, por meio da tarefa explorando as frações com a barra de chocolate, o significado da relação parte/todo, o conceito de frações equivalentes, a representação geométrica de fração, conceito de adição e

		subtração de fração com denominadores iguais e a adição de fração com denominadores diferentes.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
ETAPA 4: *Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral* **Questões norteadoras:** **Explorando as frações com cheias do rio Nilo (Elaborado pela autora – ver Apêndice A)** **Explorando as frações com a barra de chocolate (Elaborado por Ripoll et al, (2017) – ver Apêndice A)** **Tarefas de aprendizagem:** • Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações com as cheias do rio Nilo. • Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações com a barra a chocolate**.** • Discussão e reflexão entre toda a turma sobre as resoluções das tarefas	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Lápis de cor; - Borracha; - Régua.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

Etapa 4 – AULA 2 – 27/11/2019		
CONTEÚDOS	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Representação geométrica de fração; • Adição de fração com denominadores iguais; • Adição de fração com denominadores diferentes; • Frações impróprias; • Frações equivalentes.	Resolver situações de aprendizagem particulares que podem ser expressas por um procedimento geral.	-Compreender, por meio da tarefa explorando as frações no retângulo, o conceito de frações equivalentes, a adição de fração com denominadores iguais e diferentes e, por fim, frações impróprias; -Compreender, por meio da tarefa explorando as frações no caminho para a escola, o conceito de

		frações equivalentes, a adição de fração com denominadores iguais e diferentes e, por fim, o conceito de frações impróprias.
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	**RECURSOS DIDÁTICOS**	**AVALIAÇÃO**
ETAPA 4: *Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral* **Questões norteadoras:** - **Explorando as frações no retângulo (Elaborado por Ripoll et al, (2017) – ver Apêndice A)** - **Explorando as frações no caminho para a escola (Elaborado pela autora – ver Apêndice A)** **Tarefas de aprendizagem:** • Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações no retângulo. • Em grupo, resolver a tarefa explorando as frações no caminho para a escola. • Discussão e reflexão entre toda a turma sobre as resoluções das tarefas.	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Lápis de cor; - Borracha; - Régua.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

Etapa 5 – AULA 1 – 28/11/2019		
CONTEÚDOS	**OBJETIVO**	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
• Adição de fração com denominadores iguais; • Frações equivalentes.	Resolver o “Problema dos Camelos” e realizar uma avalição qualitativa da aprendizagem.	-Demostrar ter se apropriado da fração como um objeto lógico e histórico. -Demonstrar ter se apropriado do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, bem como a sua relação geral, que é a determinação de frações equivalentes para reduzir os denominadores a uma mesma unidade.

PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	RECURSOS DIDÁTICOS	AVALIAÇÃO
ETAPA 5: *Controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente* **Tarefas de aprendizagem:** • Em grupo, voltar ao "Problema dos Camelos", realizando a operação de adição com as frações da herança, demostrando a solução do problema. • Realizar uma avaliação qualitativa de si próprios, bem como o desempenho e a aprendizagem durante o experimento de ensino. • Discussão e reflexão sobre as soluções para o "Problema dos Camelos", bem como a avalição sobre o desempenho e o que compreenderam durante todas as aulas do experimento de ensino.	- Atividade impressa; - Lápis de escrever; - Borracha.	- Observação dos alunos durante a atividade de estudo, ou seja, se estão participando ativamente, se estão trocando experiências uns com os outros e o trabalho em equipe; - Observação dos alunos durante a exposição de suas análises para a turma, bem como, a interação entre os alunos neste momento; - Análise das respostas contidas na atividade impressa.

APÊNDICE C – Questionário inicial

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS – CAMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
PESQUISADORA: GABRIELA SILVA LEMES
ORIENTADOR: DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ

Prezado (a) estudante, sou Gabriela Silva Lemes, mestranda em Educação para Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Goiás. Estou realizando uma pesquisa, sob orientação do Professor Doutor Duelci Aparecido de Freitas Vaz, acerca da Teoria do Ensino Desenvolvimental para o ensino de soma de fração.

I. IDENTIFICAÇÃO

Nome:____

(Obs.: Devido a ética na pesquisa, o seu nome será substituído por símbolos ou letras.)

Sexo: Feminino (   ) Masculino (   ) **Idade:**____________________

II. ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

1. De qual forma a matemática tem sido ensinada para você?

(   ) Resolução de exercícios no quadro pela professora onde são transcritos para o caderno.

(   ) Resolução de exercícios do livro didático onde são transcritos para o caderno.

(   ) Ensino do conteúdo de matemática por meio de jogos, material concreto, dentre outros.

(   ) Outra forma de ensino. Qual?____

2. Como acontecem as aulas de matemática?

(   ) Aulas expositivas, onde o professor(a) expõe o conteúdo e não há interação entre vocês.

(   ) Aulas dialogadas, onde o professor(a) expõe o conteúdo e há interação entre vocês.

(   ) Aulas relacionadas ao cotidiano, onde o professor(a) explica onde a matemática pode ser utilizada.

(   ) Outra forma. Qual?____

3. Como acontece a resolução dos exercícios em sala de aula?

(   ) Individualmente.

(   ) Em dupla.

(   ) Em grupos pequenos.

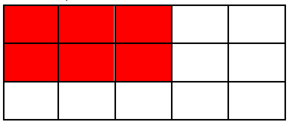
(   ) Outra forma. Qual?____

4. Por que é importante estudar matemática para você?

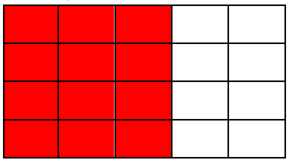
III. AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1. Escreva a fração que representa cada figura a seguir:

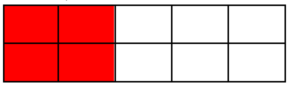
a)

 _______

b)

 _______

c)

 _______

2. Coloque (>) para maior e (<) para menor para as seguintes frações:

a) $\frac{1}{2}$ ______ $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ ______ $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ ______ $\frac{1}{4}$

3. Escreva a fração equivalente das seguintes frações:

a) $\frac{2}{4} =$ b) $\frac{6}{16} =$ c) $\frac{5}{10} =$ d) $\frac{20}{15}$

4. Some as seguintes frações:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$ b) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{5} =$ c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$ d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} =$

5. Ana e Miguel foram a pizzaria. Ana comeu $\frac{1}{5}$ da pizza e Miguel comeu $\frac{3}{5}$ da pizza.

a) Quantos pedaços Ana e Miguel comeram juntos? Represente em forma de fração.

b) Ana e Miguel comeram a pizza inteira? Explique.

6. Explique com suas palavras o que é fração para você.

APÊNDICE D – Roteiro de observação

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS – CAMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
PESQUISADORA: GABRIELA SILVA LEMES
ORIENTADOR: DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ

Pesquisa: "**A formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração: um experimento de ensino baseado na Teoria do ensino desenvolvimental de Davydov"**

1. CONTEXTO DA SALA DE AULA

1. Relacionamento entre: alunos/alunos; professor/aluno e aluno/escola.
2. Comportamento durante as tarefas de aprendizagem, seja com relação a atenção, cumprimento de regras, respeito entre os alunos, polidez, gentileza etc.
3. Levantamento de temas do seu contexto durante a atividade de estudo.
4. Exposição sobre a sua experiência com o conteúdo, abordagem de fatos sobre o seu contexto sociocultural, seu conhecimento cotidiano.
5. Liderança de grupos ou alunos.
6. Relação entre os grupos, seja em: disputa, exclusão; individualismo; solidariedade, compartilhamento e colaboração.
7. Presença das condições necessárias para a aula.

2. AÇÕES DE APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

1. Participação ativa dos alunos durante a atividade de estudo.
2. Motivação e desmotivação durante a atividade de estudo.
3. Comentários favoráveis e desfavoráveis em relação ao conteúdo e sua aprendizagem.
4. Formulação de perguntas, exposição de pensamento, discussão com a pesquisadora e colegas.
5. Capacidade de realizar as tarefas de aprendizagem conforme explicado pela pesquisadora.
6. Capacidade de associar os conteúdos com o seu contexto e cotidiano.
7. Associação do conteúdo com outros que conhece, capacidade de análise, e desenvolvimento de ações mentais sobre o conteúdo.

ANEXO

ANEXO A – Declaração de aceite da Instituição

COLÉGIO ESTADUAL MURILO BRAGA

COLÉGIO ESTADUAL MURILO BRAGA
Resolução CEE/CEB
nº 1, de 30/01/2015

DECLARAÇÃO

Declaramos para os devidos fins que a pesquisadora Gabriela Silva Lemes, portadora da RG nº 5922793 SSP-GO, inscrito no CPF sob o nº 700.600.601-58, foi aceita nesta Instituição de Ensino para desenvolver a pesquisa intitulada: "**A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO COM DENOMINADORES DIFERENTES: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV",** tendo início em 12/11/2019 e término em 03/12/2019.

Secretária da Instituição, aos 10 dias do mês de agosto de 2020.

Atenciosamente,

Inglid Menezes de Matos
Diretora – portaria nº 2441/2019

Inglid Menezes de Matos
Diretora
Portaria 2441/2019
de 28 de Junho de 2019